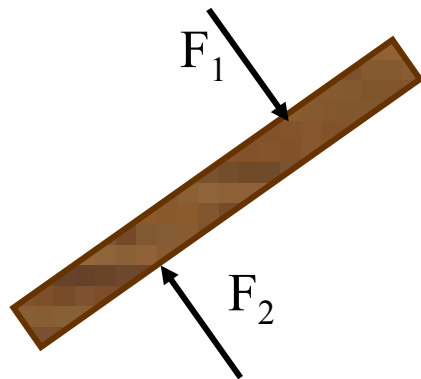


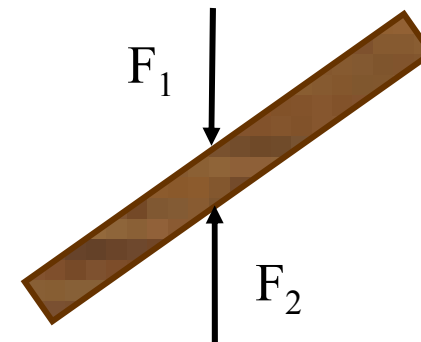
# Equilibrio statico di un corpo esteso

Se **una particella** è in **equilibrio statico**, cioè se è ferma e resta ferma, la **forza risultante** che agisce su di essa deve essere **nulla**.

Nel caso di **un corpo esteso**, per esempio una bacchetta, la condizione che la **forza risultante sia nulla è necessaria, ma non sufficiente**, perché il **corpo può ruotare** anche se la forza *risultante* che agisce su di esso è nulla.



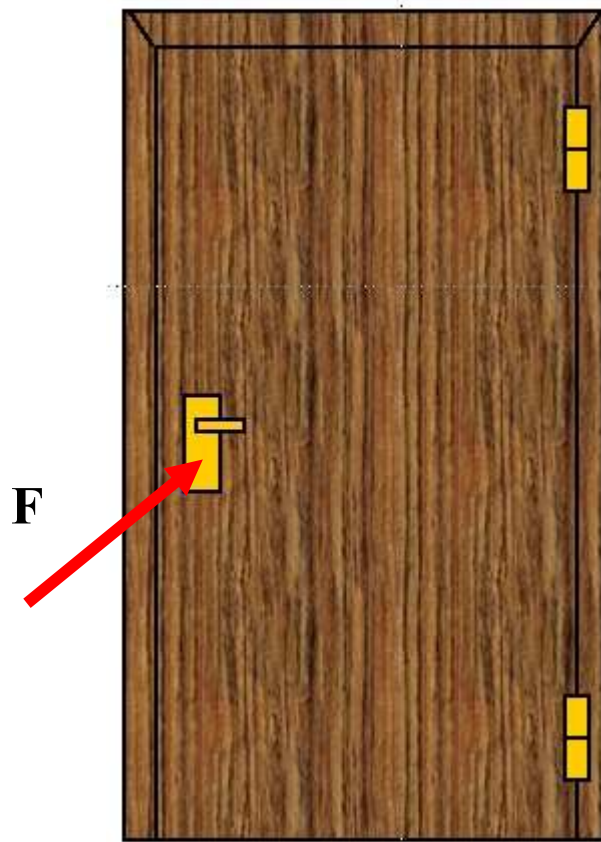
(a) Le due forze  $F_1$  e  $F_2$  sono uguali ed opposte, ma la bacchetta **non è in equilibrio statico**, perché queste forze tendono a farla ruotare in senso orario.



(b) In questo caso, le due forze hanno la stessa retta d'azione e quindi non provocano la rotazione della bacchetta.

# Equilibrio statico di un corpo esteso

Per i corpi estesi, oltre al modulo e alla direzione orientata della forza, è quindi importante anche il **punto di applicazione**.

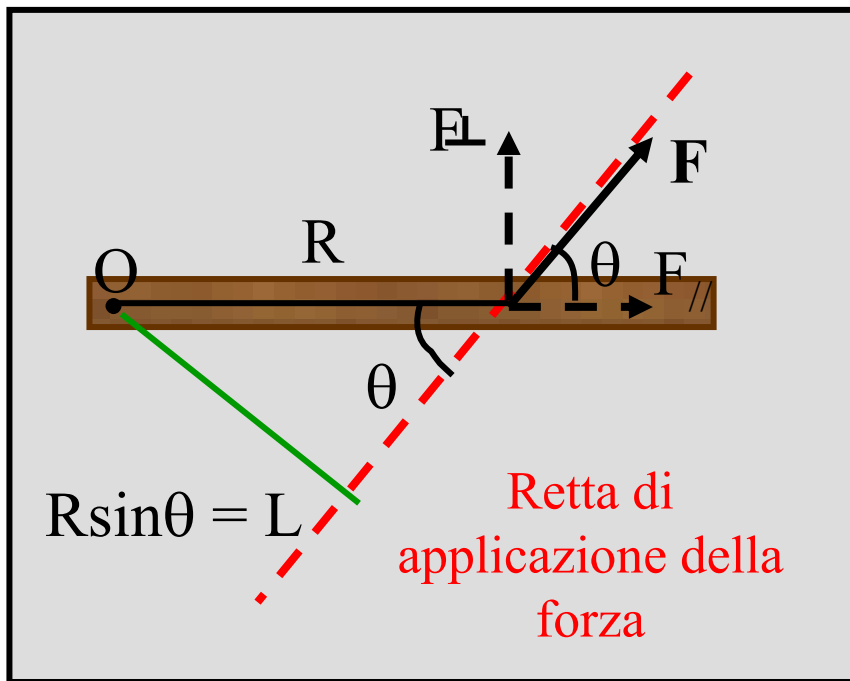


Esempio: Per **aprire** una pesante **porta** si spinge in un punto il più **lontano** possibile dai **cardini**. Nessuna forza, per quanto intensa, riuscirà ad aprirla se esercitata in un punto appartenente alla retta passante per i cardini.

# Momento di una forza

La grandezza che misura l'efficacia di una forza nel produrre la rotazione è chiamata **momento della forza M**. Il momento di una forza può essere **orario** oppure **antiorario**, a seconda del senso di rotazione che tende a produrre: in tal caso viene considerato rispettivamente positiva (rotazione oraria) o negativa (rotazione antioraria).

Nell'esempio illustrato in figura, il momento della forza **F** è dato da:



$$M = F R = (F \sin \theta) R = F (R \sin \theta) = FL$$

**R** è la **distanza** tra il punto di applicazione della forza e il punto O, in cui la sbarra è fissata.

**L** è il **braccio** della forza.

Il momento è dato dal prodotto della forza per il braccio.

# Condizioni per l'equilibrio

*“Perché un corpo sia in **equilibrio statico**, il momento risultante delle forze calcolato rispetto ad un punto qualsiasi, in senso orario, deve essere uguale al momento risultante in senso antiorario”*

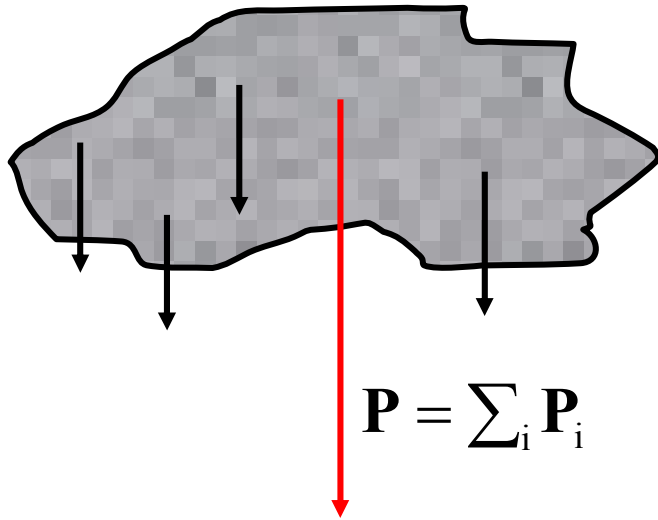
Se chiamiamo **positivi** i momenti di forza che hanno **senso orario** **negativi** **quelli con senso antiorario**, questa condizione equivale a dire che la somma algebrica dei momenti delle forze rispetto a un punto qualsiasi deve essere nulla.

$$\sum \mathbf{F} = 0$$

$$\sum \mathbf{M} = 0$$

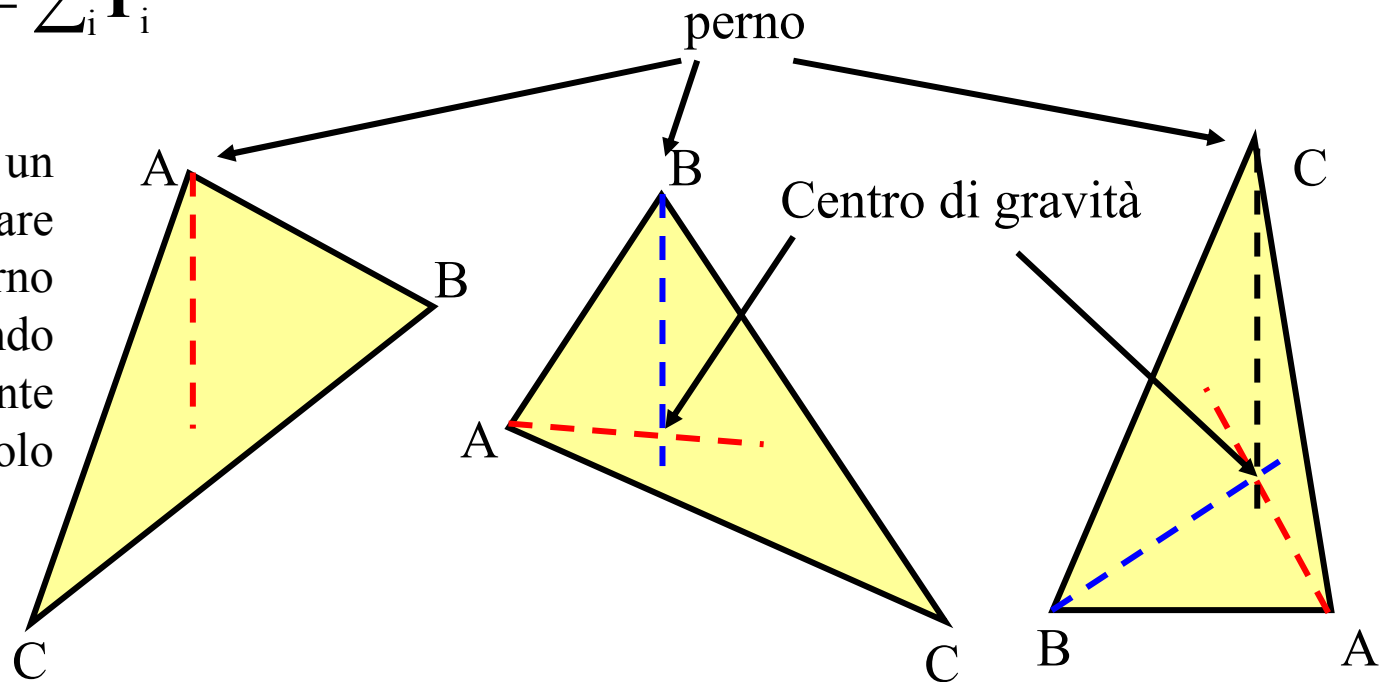
**CONDIZIONI PER L'EQUILIBRIO  
STATICO DI UN CORPO ESTESO**

# Centro di gravità



I pesi  $\mathbf{P}_i$  di tutte le particelle che costituiscono un corpo possono essere sostituiti con il peso totale  $\mathbf{P}$  del corpo, **applicato nel centro di gravità**, che è il punto rispetto al quale il momento risultante delle forze  $\mathbf{P}_i$  è nullo.

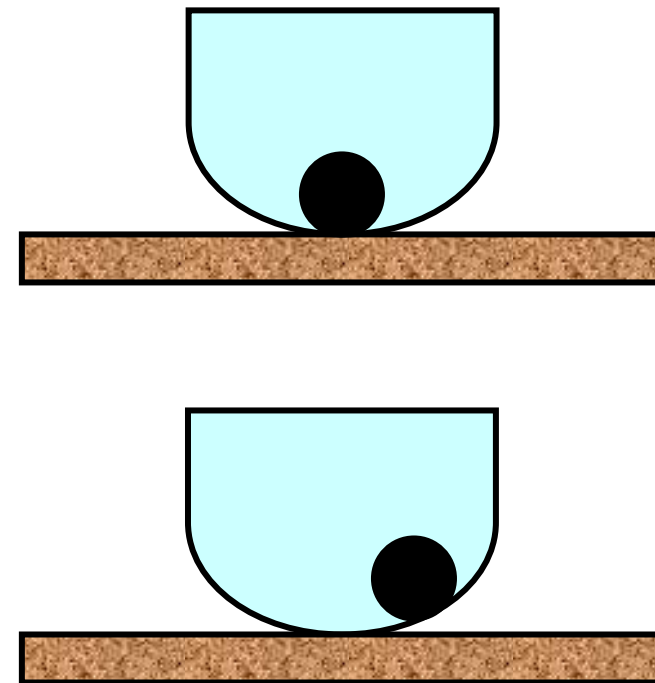
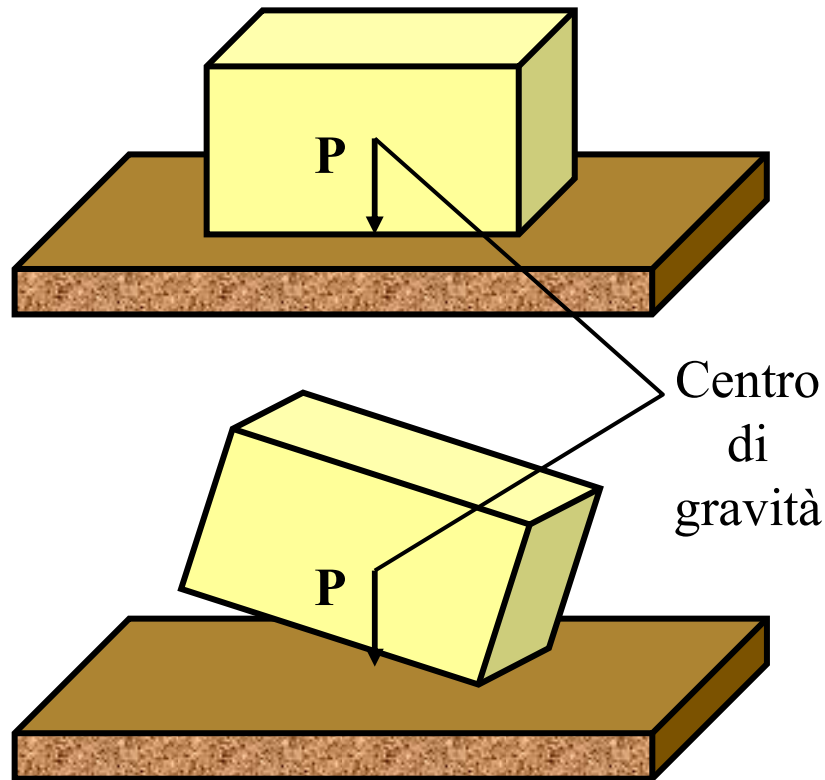
Il **centro di gravità** di un corpo si può determinare sospendendolo ad un perno in punti diversi e tracciando la retta verticale passante per il perno (in triangolo punto incontro mediane)



# Equilibrio stabile

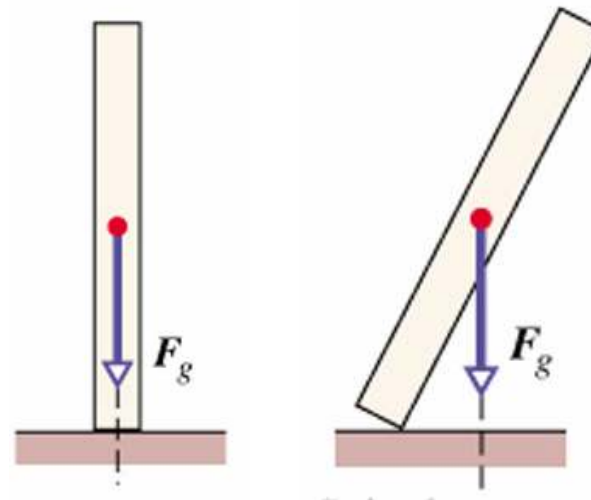
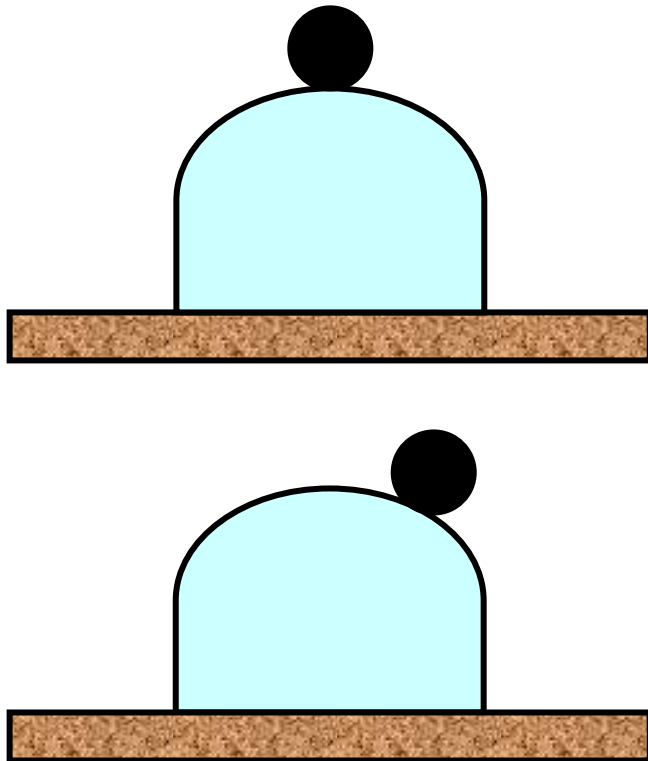
L'equilibrio di un corpo può essere di tre tipi: **stabile**, **instabile** o **indifferente**.

L'equilibrio **stabile** si ha quando le forze o i momenti di forze risultanti che insorgono a causa di un **piccolo spostamento** del corpo spingono il corpo indietro verso la sua **posizione di equilibrio**.



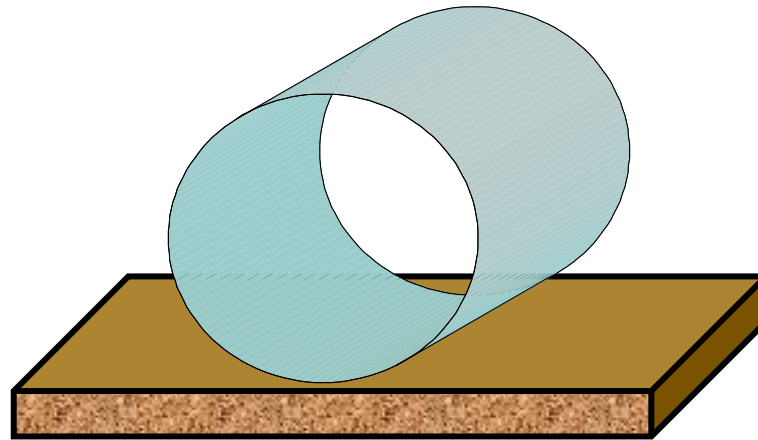
# Equilibrio instabile

L'equilibrio **instabile** si ha se le forze o i momenti di forze risultanti che insorgono a causa di un **piccolo spostamento** del corpo spingono il corpo **lontano** dalla **sua posizione iniziale**.



# Equilibrio indifferente

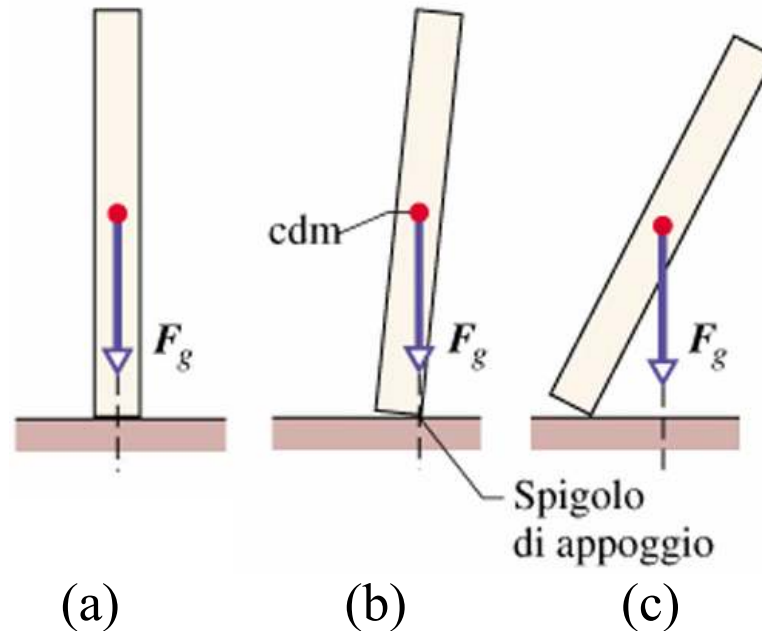
L'equilibrio **indifferente** si ha quando, in seguito ad un **piccolo spostamento** del corpo, non vi sono forze o momenti di forza risultanti che tendano a riportarlo verso la sua posizione iniziale o ad allontanarlo da essa.



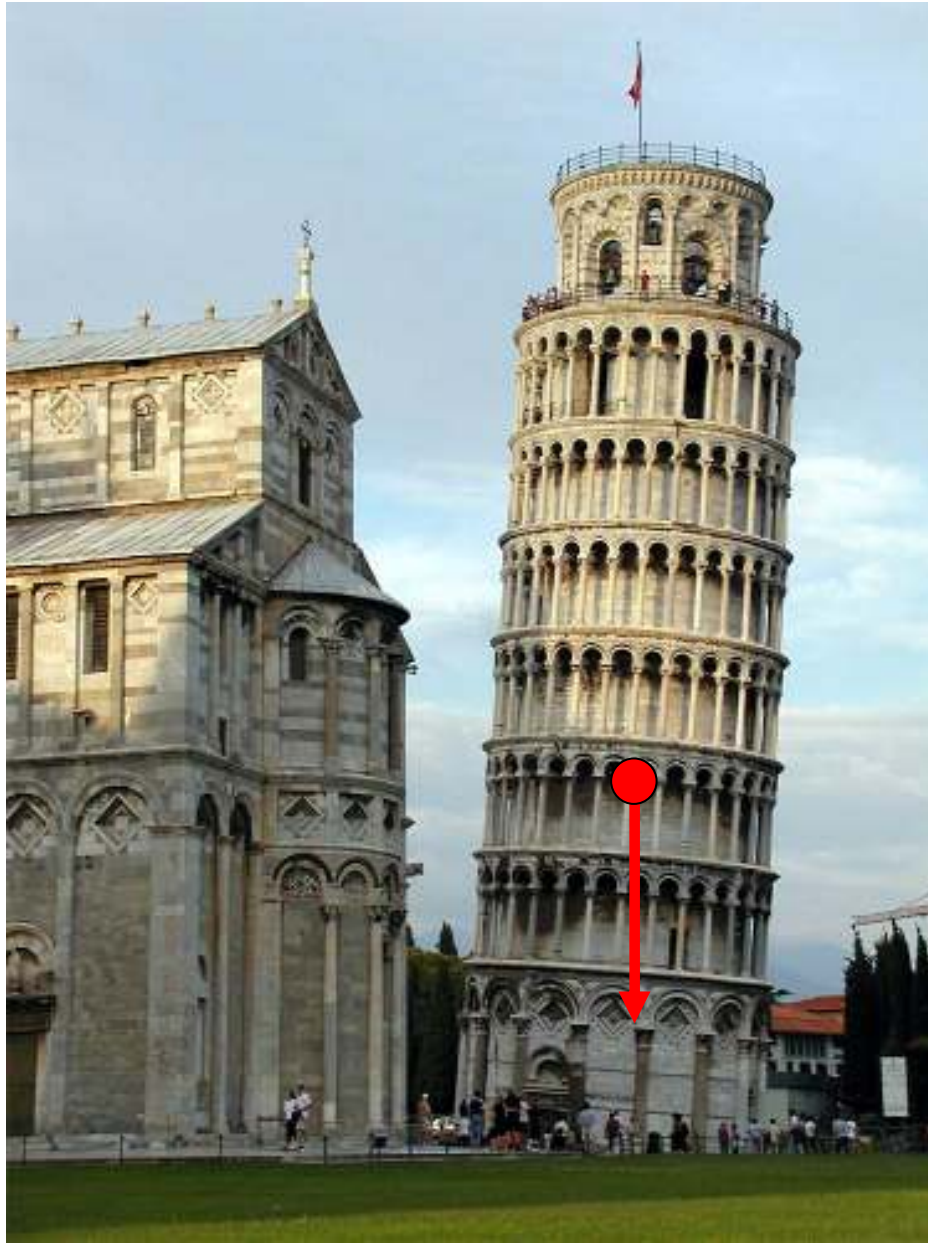
Se si ruota leggermente il cilindro, esso è di nuovo in equilibrio.



# Stabilità e centro di gravità



La **stabilità dell'equilibrio è relativa**. Se la bacchetta in (a) viene **ruotata poco**, come in (b), essa ritorna nella sua posizione di equilibrio iniziale, purché la proiezione verticale del **centro di gravità si trovi entro la base di appoggio**. Se la rotazione è maggiore, come in (c), la proiezione verticale del centro di gravità è **al di fuori della base d'appoggio** e la bacchetta cade.



36 m

56 m

# Macchine semplici

Una macchina semplice è un dispositivo che ha lo scopo di trasformare una **forza in entrata in una forza maggiore in uscita**

**A volte il vantaggio può essere anche solo quello di invertire il verso della forza**

Esempi di macchine semplici sono **le leve, i piani inclinati e i sistemi di carrucole.**

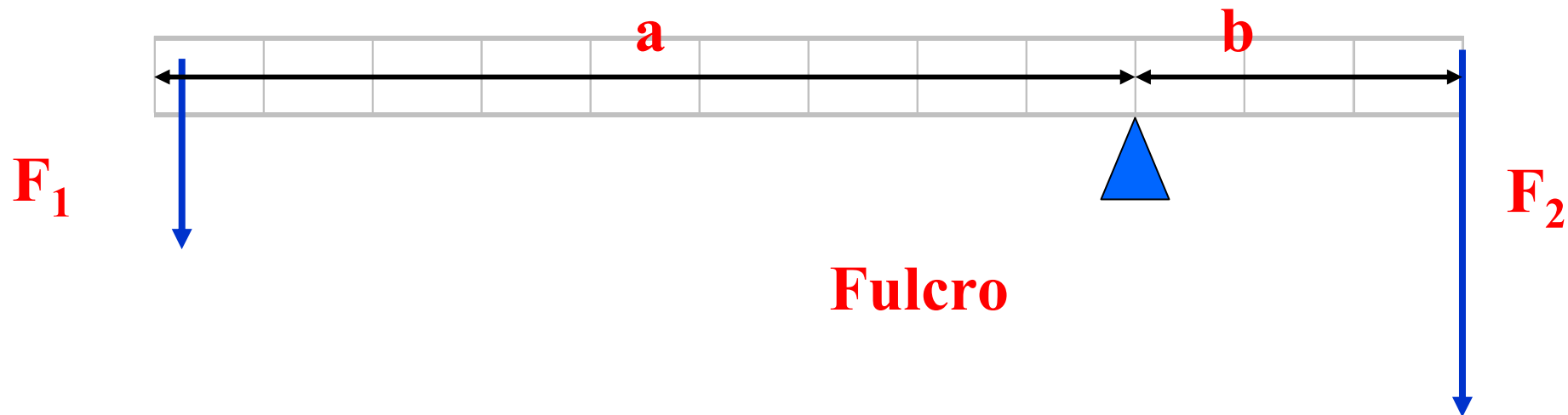
Il **vantaggio A** di una macchina semplice è definito come **il rapporto tra la forza in uscita e la forza in entrata.**

$$A = \frac{\text{forza in uscita}}{\text{forza in entrata}}$$

# Leve di primo genere

Le leve sono vantaggiose quando  $F_1$  è minore di  $F_2$  perchè il braccio  $F_1$  è maggiore del braccio di  $F_2$ . Serve per sollevare pesi.

Esempio: altalena su cui stanno persone con masse diverse. La più leggera si siede più lontano

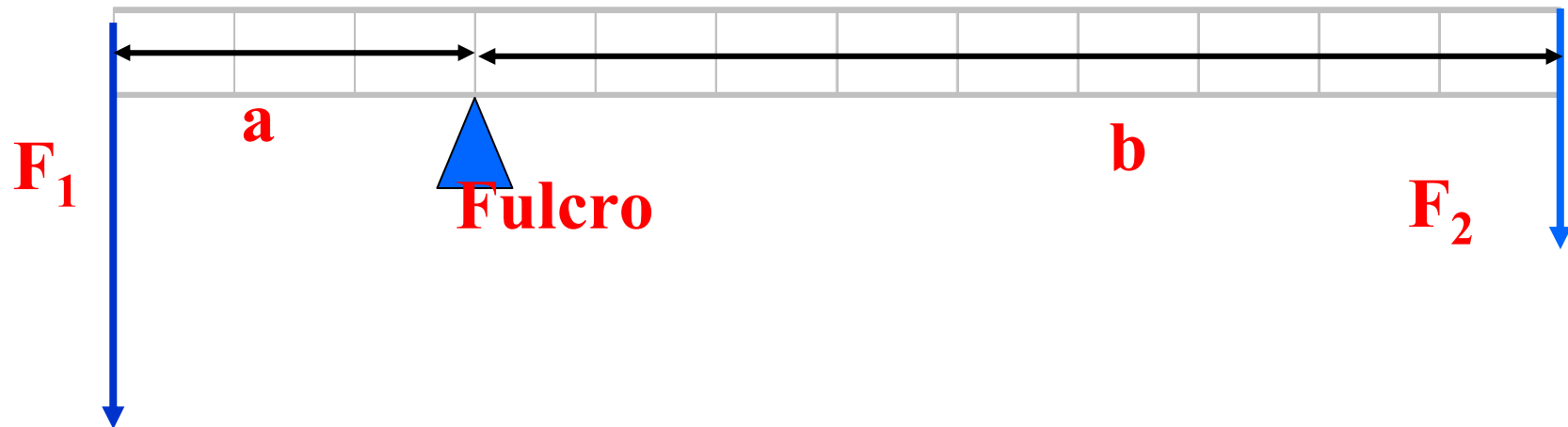


\*

Le leve sono svantaggiose quando la  $F_1$  è maggiore di  $F_2$  perchè il braccio di  $F_1$  è minore di quello di  $F_2$ .

Può essere utile se  $F_2$  (bambino) deve sollevare ( $F_1$ ) (padre)

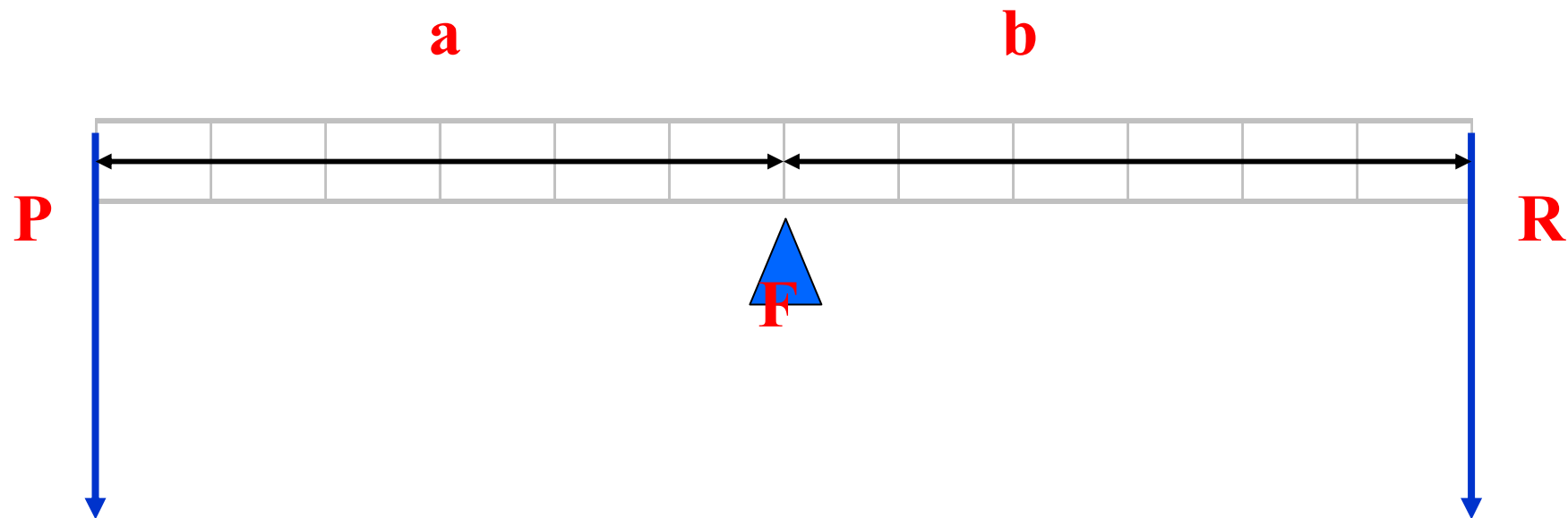
Oppure posso sollevare oggetti lontani che non riesco a prendere in altro modo



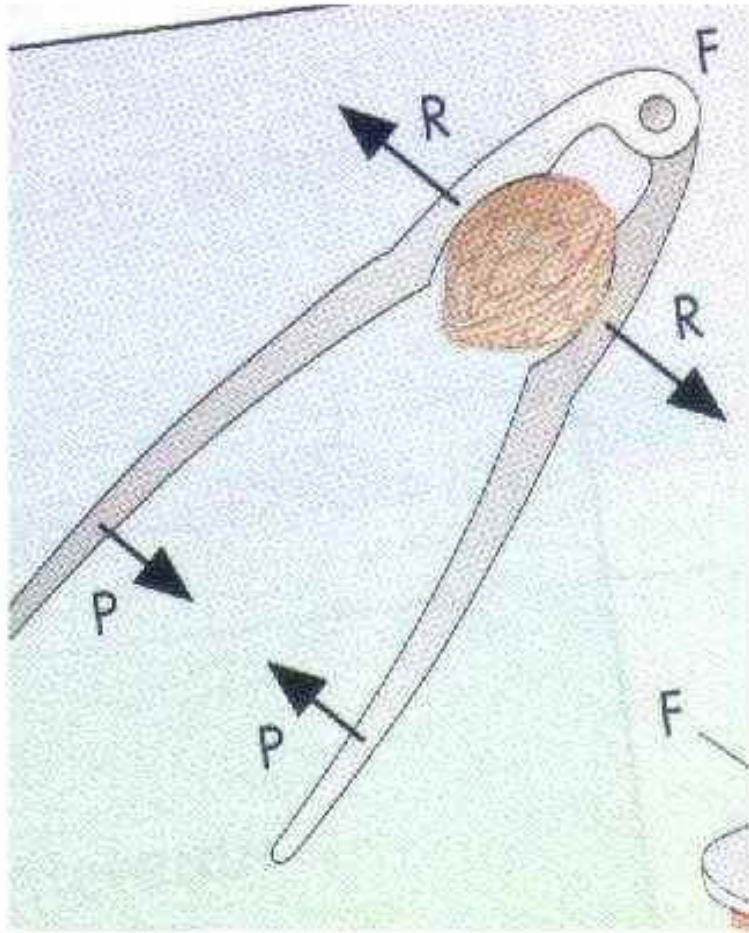
\*

Le leve sono **indifferenti** quando la **P è uguale ad R** perchè il braccio della potenza è uguale al braccio della resistenza.

Es: Bilancia a braccia eguali

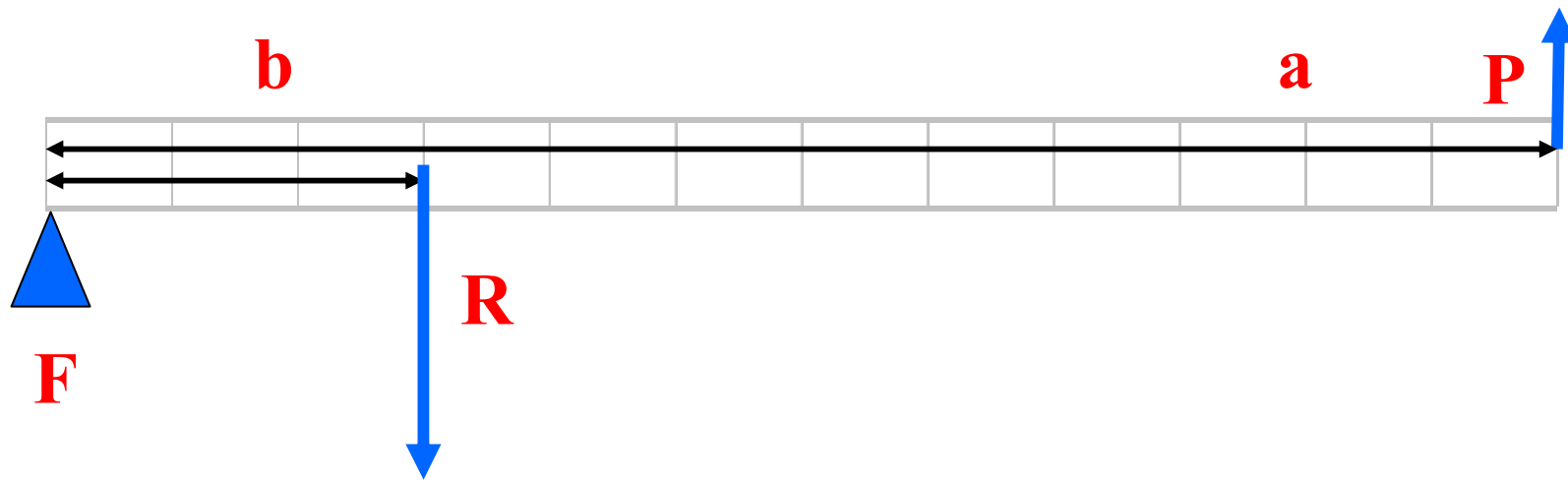
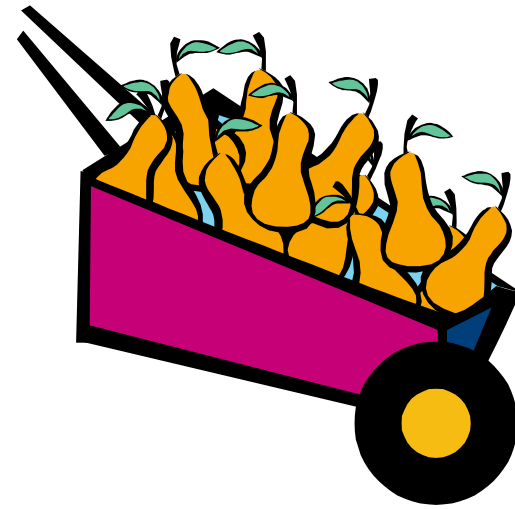


# Leve di secondo genere



- Hanno il fulcro all'estremità.
- Hanno la resistenza fra il fulcro e la potenza.
- Sono sempre vantaggiose.
- $a > b$  quindi  $P < R$ .

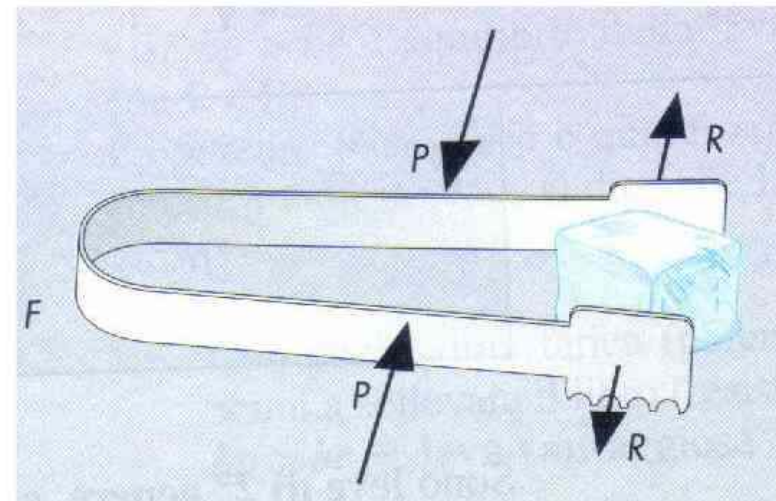
- Esempi: lo schiaccianoci, la carriola, il trolley, il piede.



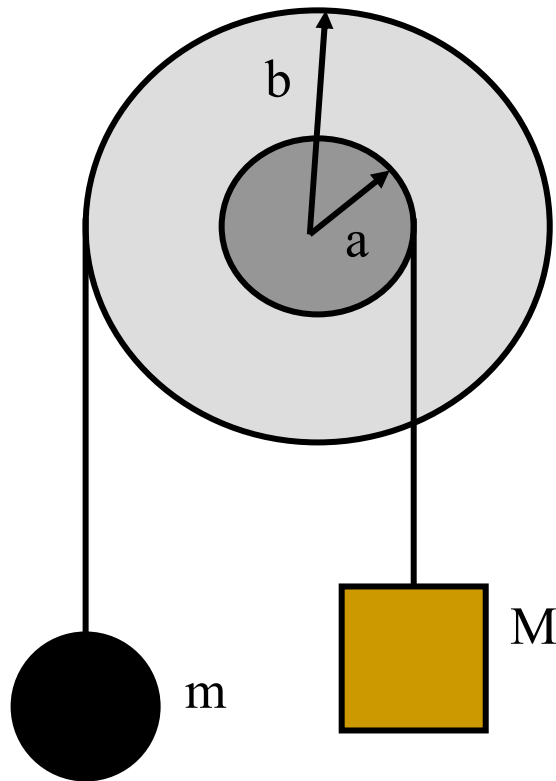


# Leve di terzo genere

- Queste leve sono sempre **svantaggiose**, ma sono molto usate perché permettono di **afferrare** e manipolare con precisione **oggetti** anche **molto piccoli**.
- Hanno la potenza fra il fulcro e la resistenza.
- Esempi: gli aghi, la canna da pesca, il **braccio**, le **molle** per il **camino**, le pinze per il **ghiaccio**...



# Un esempio di macchina semplice



Determinare la massa  $m$  che equilibri  $M$ .

$a$  = raggio interno = 1 cm

$b$  = raggio esterno = 6 cm

$M = 12$  kg

**Resistenza:**  $R = M \cdot g = 12 \cdot 9,8 = 117,6$  N

Rispetto al **fulcro** (il centro della ruota), il momento della forza resistente è:

$$M_R = R \cdot a = M \cdot g \cdot a = 117,6 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Rispetto al fulcro, il momento della potenza è:

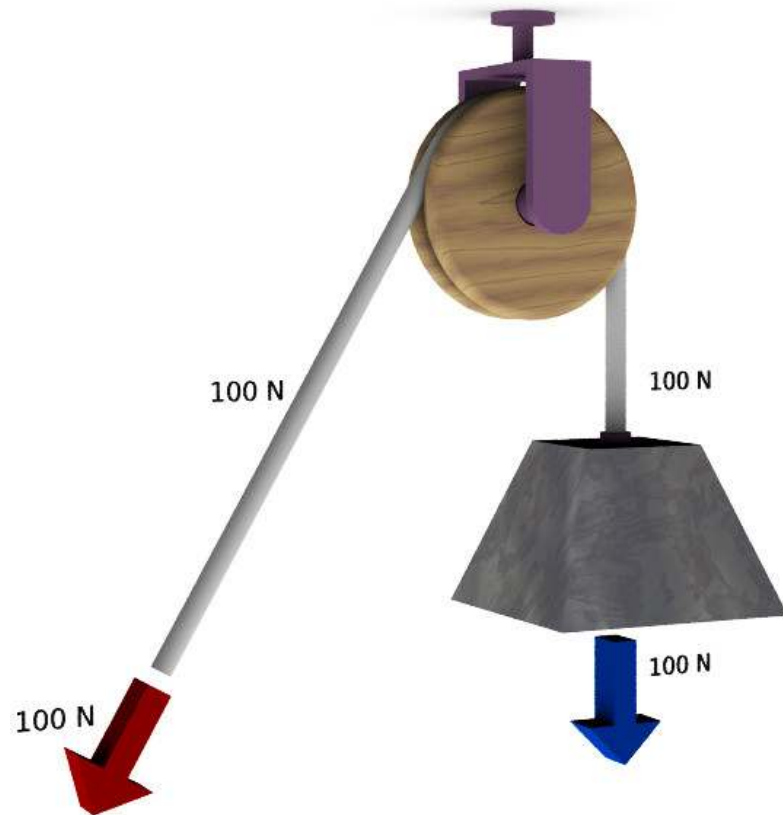
$$M_P = F \cdot b$$

Nelle condizioni di equilibrio:

$$M_P = M_R, \text{ quindi: } F = R \cdot (a/b) = 19,6 \text{ N}$$

$$F = mg, \text{ quindi } m = 1,99 \text{ kg.}$$

# La carrucola



Nella carrucola fissa, l'asse della puleggia è fisso, e la ruota ha la sola funzione di **deviare la forza** applicata ad una estremità della fune. L'altra estremità è collegata al carico.

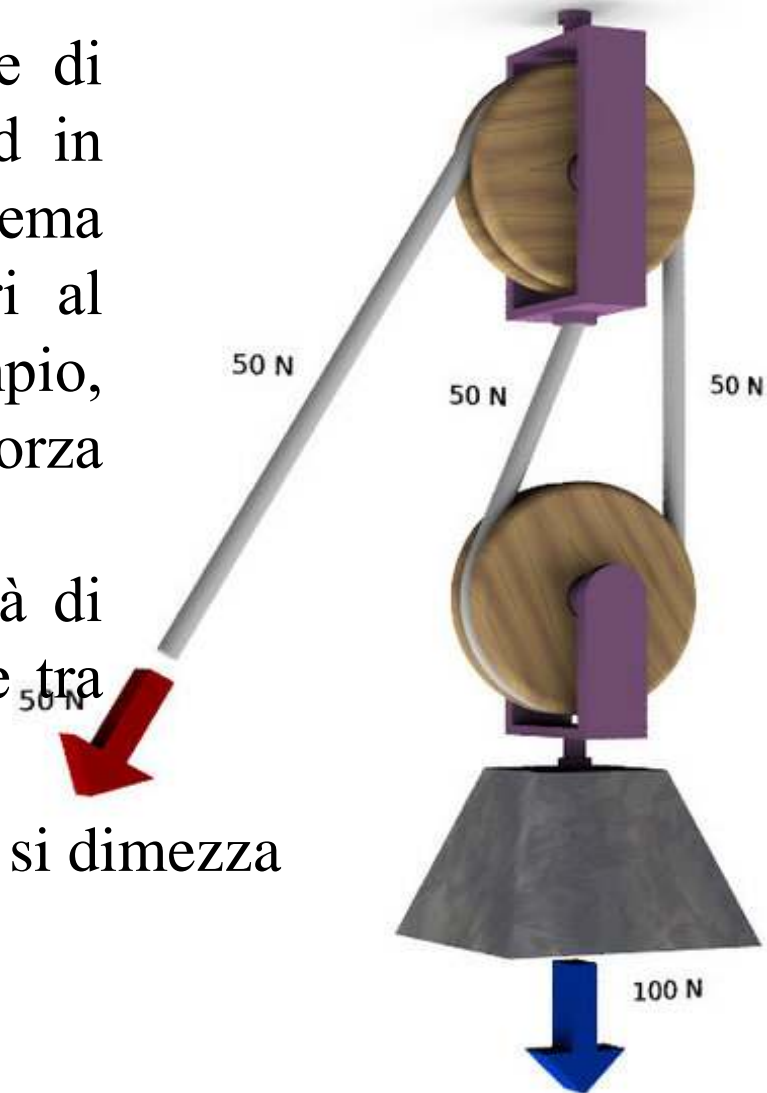
Il rapporto tra la **forza attiva** e la **forza resistente** all'equilibrio è pari ad uno.



Una carrucola composta è un insieme di **due o più carrucole**, in parte **fisse** ed in parte **mobili**. Il vantaggio di questo sistema è di avere un rapporto di forze pari al numero di carrucole presenti. Per esempio, se ho **due ruote**, il rapporto tra la forza sollevata e la forza applicata è di **2 a 1**.

Lo **stesso rapporto** si ha tra la velocità di trazione e la velocità di sollevamento e tra **gli spazi percorsi**

La forza per sollevare il peso di 100 N si dimezza a 50N





# Esempio: David di Michelangelo

Available online at [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com)



Journal of Cultural Heritage 7 (2006) 273–285

Journal of  
Cultural Heritage

<http://france.elsevier.com/direct/CULHER/>

Original article

## Diagnostic analysis of the lesions and stability of Michelangelo's David

A. Borri, A. Grazini\*

*Civil and Environmental Engineering Department, School of Engineering, University of Perugia, Via Duranti, 93-06125 Perugia, Italy*

Received 1 December 2005; accepted 28 June 2006

---

### Abstract

This work presents an account of the results of diagnostic analyses on the lesions that were first detected in Michelangelo's *David* in the mid-1800s. After summarizing the events that may have affected the statue's stability and the state of deformation, the authors present the results of the Finite Elements Method (FEM) tests conducted on the digital model of the statue's surface. The analysis of these results made it possible to identify the static conditions that generated the cracks in the lower part of the left leg and in the tree trunk of the *David*. Lastly, the current situation was analyzed from the perspective of both deformation and stresses, evaluating the statue's stability also as regards its structural response to the seismic activity at the level expected for the Florence area.

© 2006 Elsevier Masson SAS. All rights reserved.

*Keywords:* Michelangelo's David; Carrara marble; FEM analysis; Seismic analysis

---

## Esempio: David di Michelangelo

Il centro di massa ( $G_t$ ) non si trova in corrispondenza del centro di massa del basamento ( $G_b$ ), ma spostato verso la gamba destra.

Il peso grava quindi maggiormente su tale gamba (quella con il tronco d'albero).



Fig. 1. Michelangelo's *David*

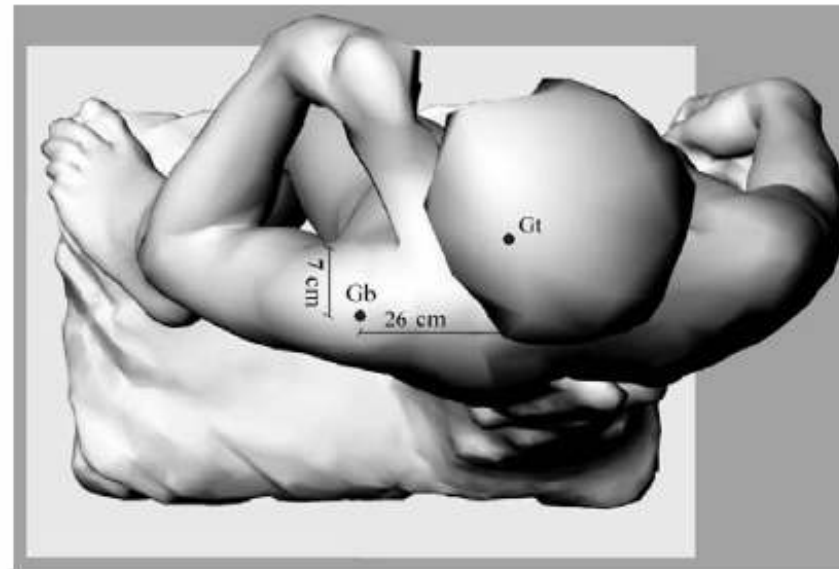


Fig. 3. Projection of the center of gravity of the masses ( $G_t$ ) under maximum load (statue + cast + base). Note the eccentricity with respect to the center of gravity ( $G_b$ ) of the supporting base on the ground.

## Esempio: David di Michelangelo

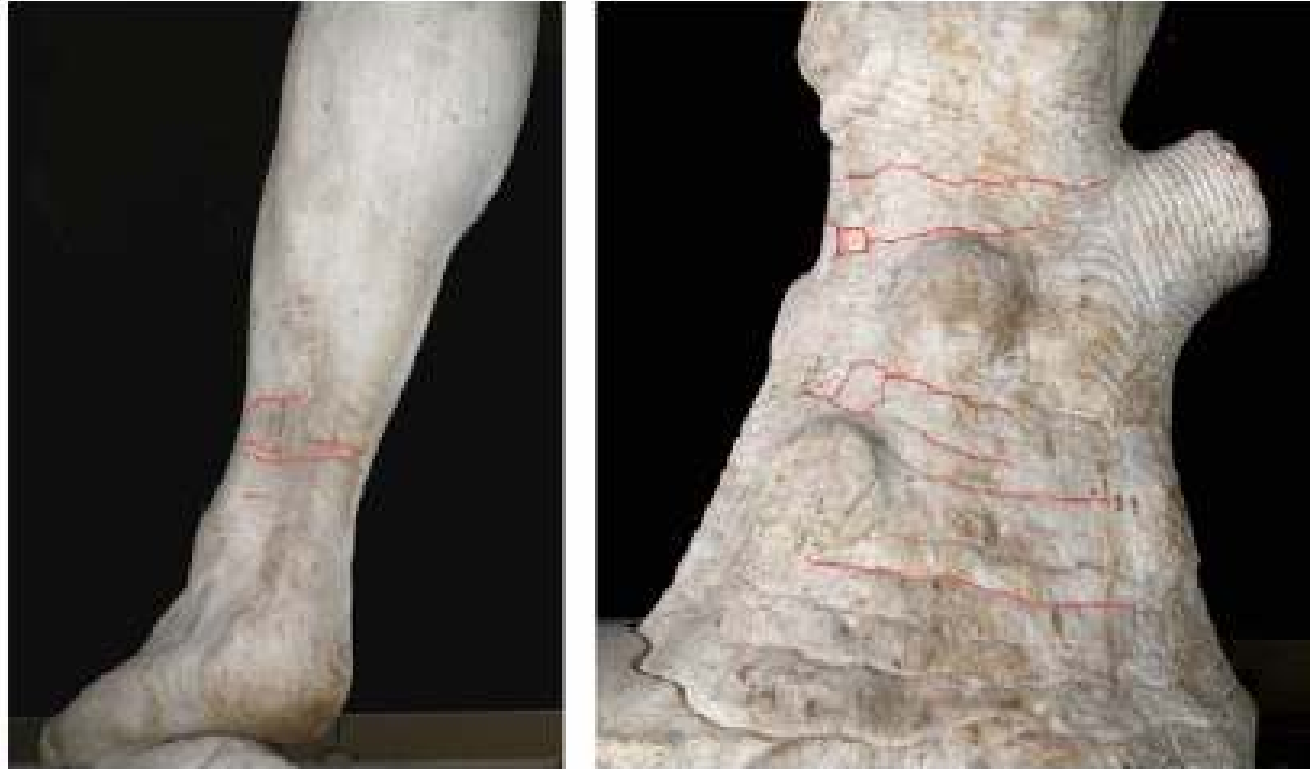
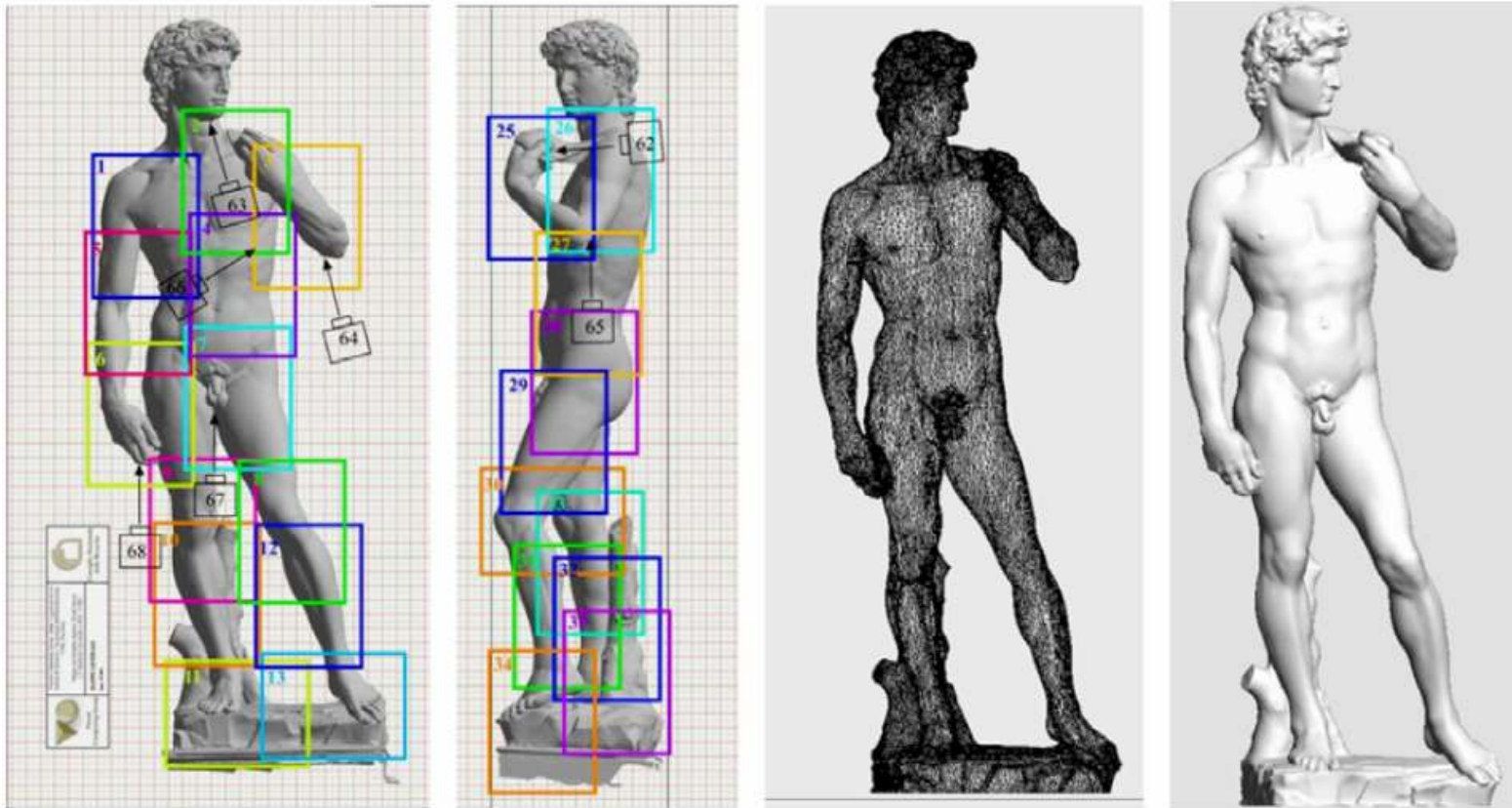


Fig. 2. Current state of the cracks in the left leg and the tree trunk of the *David*. The main lesions are highlighted.

Nelle parti basse della statua (soprattutto sul tronco d'albero) sono visibili diverse crepe, che in queste immagini sono evidenziate in rosso

## Esempio: David di Michelangelo



Usando la scansione laser (verrà studiata il prossimo anno), la statua è stata ricostruita in forma digitale.

Questo ha permesso uno studio, per mezzo di software opportuni, degli stress a cui sono sottoposte le varie parti della statua.



# Esempio: David di Michelangelo

Le zone rosse sono quelle sottoposte a maggior stress (tra circa 1 GPa e 1,5 GPa)

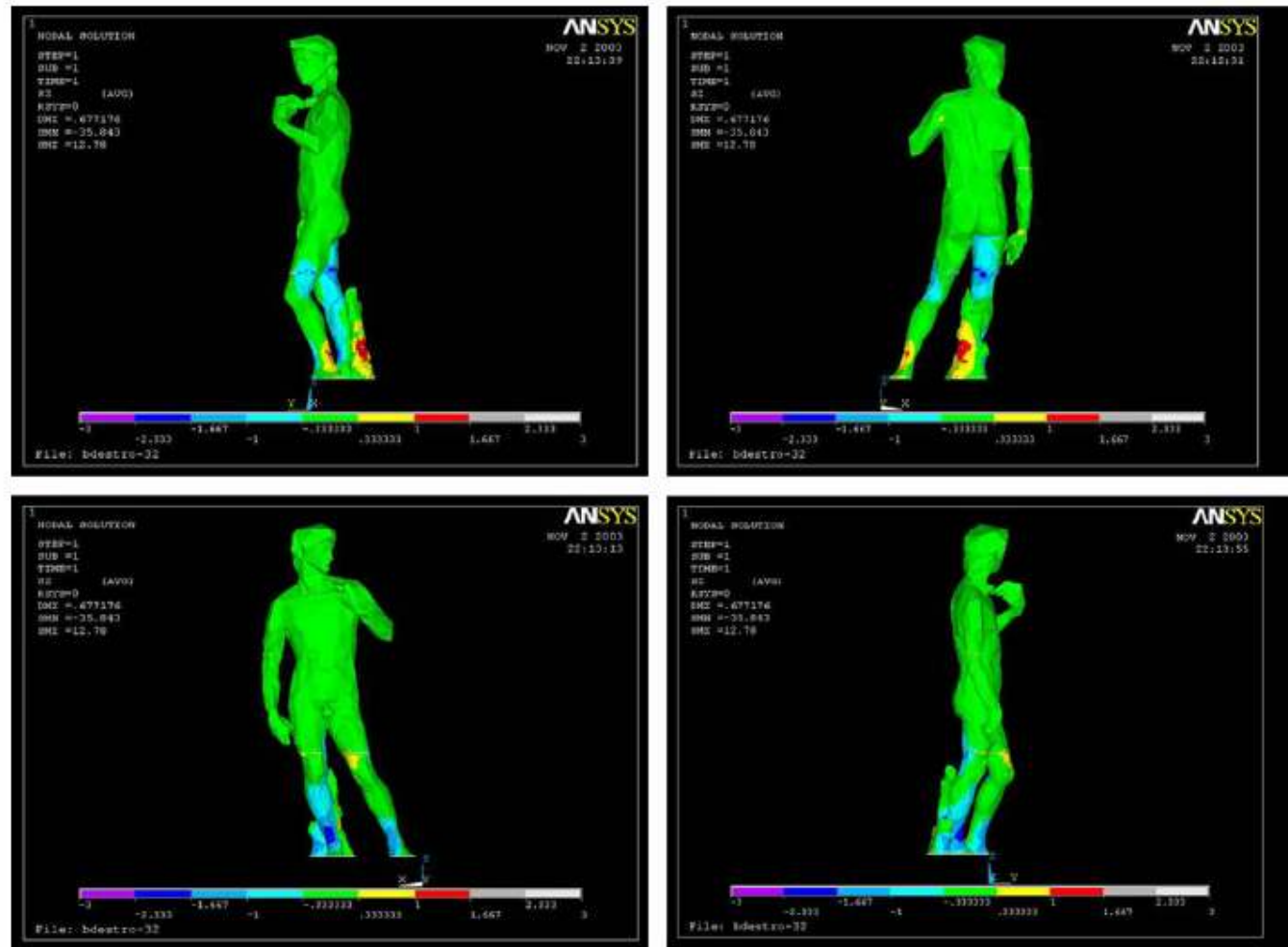


Fig. 5. Distribution of vertical stresses  $\sigma_Z$  in the *David* in present-day conditions.

## Esempio: David di Michelangelo

L'immagine mostra che lo stress viene scaricato principalmente sul lato posteriore del tronco d'albero ed in parte sulla caviglia sinistra. Il **tronco d'albero** è quindi un elemento di **vitale importanza** per la statica della statua. Senza di esso il David non resisterebbe allo stress causato dall'eccentricità del centro di massa e sarebbe collassato anche prima del suo completamento.

Il **carico di rottura** per il marmo utilizzato da Michelangelo è compreso tra **2 GPa e 3 GPa** (a seconda se esposto o meno agli agenti atmosferici). Se si esegue una **simulazione** con il calcolatore eliminando il tronco d'albero si ottiene un carico sulle caviglie di più di 4 GPa che avrebbe fatto collassare l'opera.

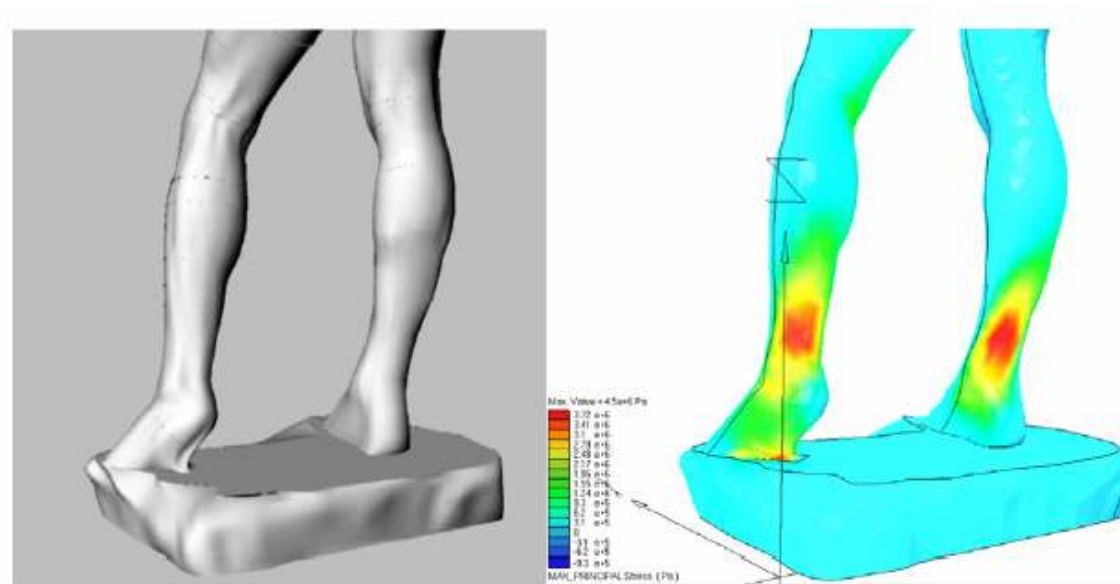


Fig. 7. FEM analysis in vertical conditions (main traction  $\sigma_1$  stresses) if the statue had been made without the tree trunk: the maximum tensile stress would have exceeded  $4 \text{ N/mm}^2$ .

## Esempio: David di Michelangelo

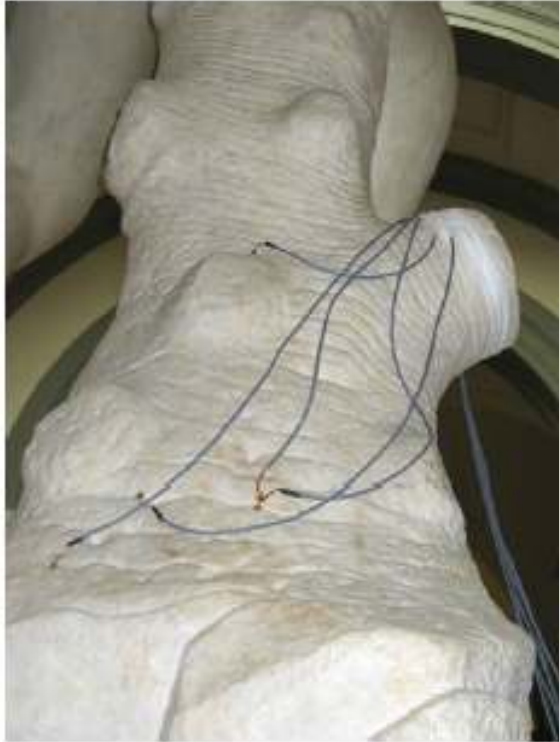


Fig. 23. (a) Strain gages disposition on the three trunk.



Diverso è il discorso sulla **stabilità in caso di forti oscillazioni come in presenza di un terremoto**.

Fortunatamente, fino ad adesso, i più grossi terremoti nella zona si sono verificati prima della formazione delle crepe, ma è probabile che su lunghi periodi ce ne saranno altri.

Studi sono in corso per valutare questo problema in modo da adottare le contromisure opportune. In figura sono mostrati i **tensimetri** collocati nei punti nevralgici della statua e che sono stati utilizzati per valutare i movimenti durante una sollecitazione dinamica.

I primi test (2006) hanno mostrato movimenti significativi delle zone lesionate anche per piccoli impulsi. Ulteriori test sono previsti per il futuro.

# Attrito

Quando cerchiamo di muovere un oggetto che si trova a contatto con una superficie ci accorgiamo che **l'effetto della forza non è immediato**: se l'oggetto è pesante dobbiamo prima “*smuoverlo*” dalla sua posizione originale. Quando l'oggetto si mette in movimento, l'esperienza ci insegna che:

- la **forza che dobbiamo applicare per mantenere in moto l'oggetto è minore di quella necessaria per smuoverlo**;
- se smettiamo di applicare una forza, **l'oggetto si ferma**.

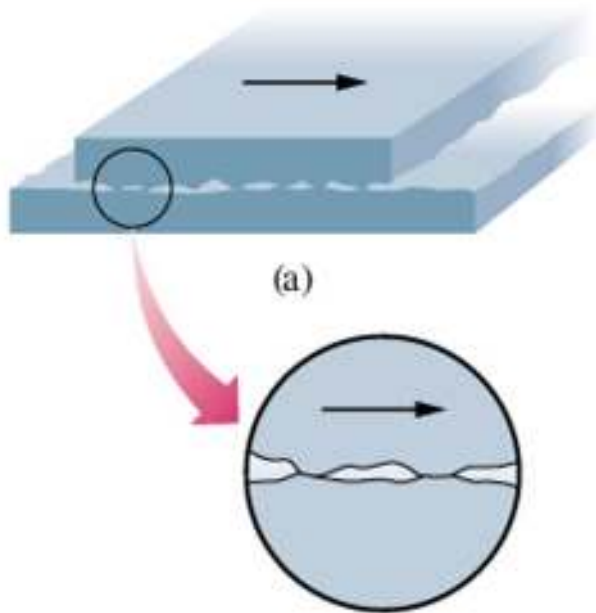
Queste osservazioni sarebbero in contraddizione con il secondo principio, a meno che non attribuiamo questi effetti a delle **forze che si generano nel contatto fra l'oggetto da muovere e la superficie** su cui questo è appoggiato o il mezzo in cui esso si muove.

Queste **forze** che si oppongono al moto di un oggetto si chiamano **ATTRITI**.

Ci sono **varie forme di attrito**, che vengono per lo più individuate e classificate in base alle diverse situazioni dinamiche in cui si trova l'oggetto.

# Attrito

Se sul pavimento è appoggiata una grande cassa e la si spinge con una piccola forza orizzontale  $\mathbf{F}$ , è possibile che la cassa non si muova affatto. La ragione è che il pavimento esercita una **forza di attrito statico**  $\mathbf{f}_s$ , che equilibra la forza  $\mathbf{F}$ . Questa forza di attrito è dovuta ai legami tra le molecole della cassa e quelle del pavimento in quei punti in cui le superfici sono in contatto molto stretto.



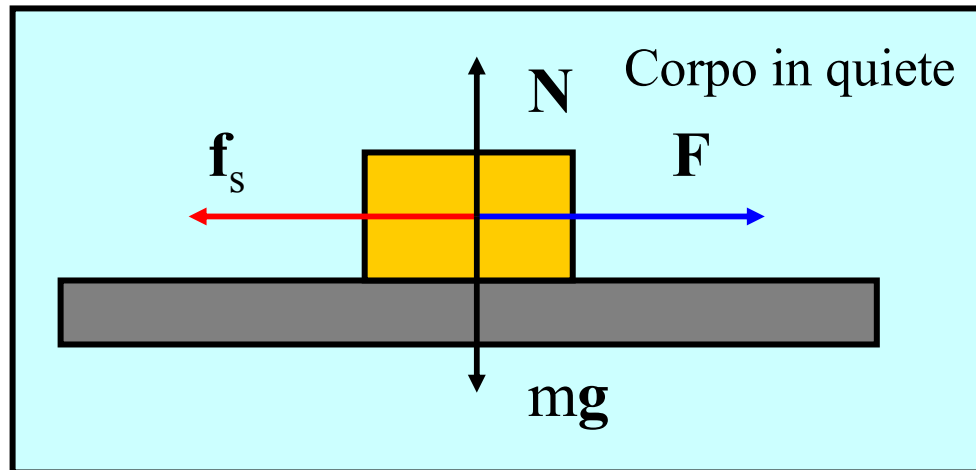
La **forza di attrito statico** può variare da zero ad una **forza massima**  $\mathbf{f}_{s\max}$ , a seconda della forza con cui si spinge; **se la forza  $\mathbf{F}$  è sufficientemente intensa, la cassa striscerà sul pavimento.**

**Mentre la cassa striscia si creano e si rompono continuamente legami molecolari** e si rompono piccoli frammenti delle superfici: il risultato è una **forza di attrito dinamico** (o attrito cinetico)  $\mathbf{f}_d$  che si oppone al moto. Perché la cassa continui a strisciare con velocità costante occorre esercitare una forza uguale ed opposta alla forza di attrito dinamico.

# Attrito statico

Il modulo della forza di attrito statico può variare fra zero e un valore massimo che è **proporzionale alla reazione vincolare normale al piano su cui è appoggiato il corpo**. Direzione e verso sono indicati in figura.

$$|\mathbf{f}_s| \leq \mu_s N$$



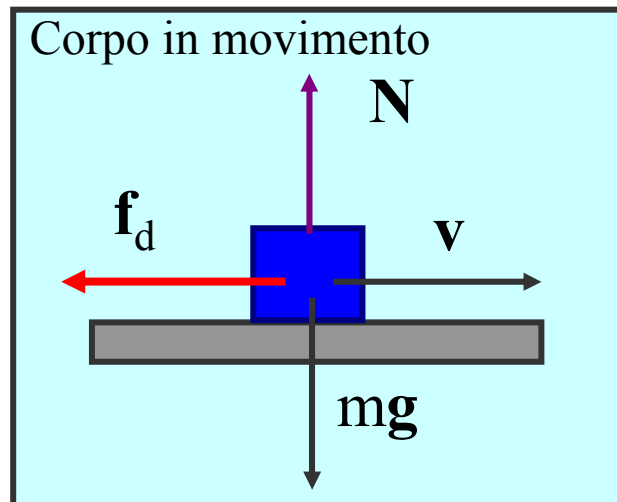
**Il coefficiente adimensionale  $\mu_s$  è detto coefficiente di attrito statico.**

# Attrito dinamico

La forza di attrito dinamico ha sempre direzione uguale a quella della velocità dell'oggetto, verso contrario e modulo proporzionale alla reazione vincolare normale al piano su cui si muove l'oggetto:

$$|\mathbf{f}_d| = \mu_d N$$

**Il coefficiente adimensionale  $\mu_d$  è detto coefficiente di attrito dinamico.**



Sperimentalmente è stato trovato che:

- $\mu_d$  è minore  $\mu_s$ ;
- per velocità comprese tra circa 1cm/s e parecchi metri al secondo  $\mu_d$  è praticamente costante;
- $\mu_d$  (come  $\mu_s$ ) dipende dalla natura delle superfici, ma è indipendente dall'area (macroscopica) di contatto.

# Coefficienti di attrito

Il coefficiente di **attrito statico** è in generale **maggiore** del coefficiente di **attrito dinamico**. Alcuni esempi:

Superfici	$\mu_s$	$\mu_d$
Legno su pietra	0.7	0.3
Gomma su cemento asciutto	0.65	0.5
Gomma su cemento bagnato	0.4	0.35
Gomma su ghiaccio	0.2	0.15
Acciaio su acciaio asciutto	0.15	0.12

Questi numeri sono indicativi, infatti i coefficienti di attrito **dipendono** molto dallo **stato delle superfici**, dalla **temperatura**, dall'**umidità**, ecc.. **Vengono valutati sperimentalmente**



# Gli attriti sono uguali a tutte le altre forze?

Abbiamo visto che dove sono presenti attriti vanno considerate delle forze da includere nell'equazione del moto. Tuttavia c'è una differenza sostanziale tra gli attriti e le altre forze che va sottolineata:

**Gli attriti sono forze che si esercitano solo in presenza di moto (o tentativo di moto)**

Se appoggio un blocco su una superficie piana che abbia un certo coefficiente di attrito e non spingo il blocco parallelamente alla superficie, NON ho presenza di forza d'attrito (mentre, ad esempio, agiscono la forza peso e la reazione vincolare del piano)

**Gli attriti non sono in grado di generare moto, ma solo di opporvisi**

# Attrito volvente

Al moto di puro rotolamento sotto l'azione di forze conservative, come lo sono le forze costanti e in particolare la forza peso, **si può applicare la legge di conservazione dell'energia meccanica.**

Infatti **la forza di attrito** agisce su un punto fermo, per cui lo spostamento è nullo ed è quindi ***nullo il lavoro.***

Sperimentalmente si osserva che un corpo che rotola senza strisciare su un piano orizzontale, in assenza di forze o di momenti applicati, si arresta dopo un certo tempo.



Deve esistere un'altra forma di attrito (**attrito volvente o di rotolamento**), che viene attribuito alla deformazione locale del piano e può essere rappresentato con l'azione di un momento:

$$M_v = hmg \quad \text{Con } h: \text{coefficiente di attrito volvente [m]}$$

Per vincere il momento dovuto all'azione dell'attrito volvente si deve applicare al corpo di forma circolare una forza di trazione:

$$F_2 \geq \frac{hmg}{r}$$

Per spostare cilindro di  $m=10^3$  Kg se striscia

$$F = \mu_s mg = 0,2 \cdot 1000 \cdot 9,8 = 1960\text{N}$$

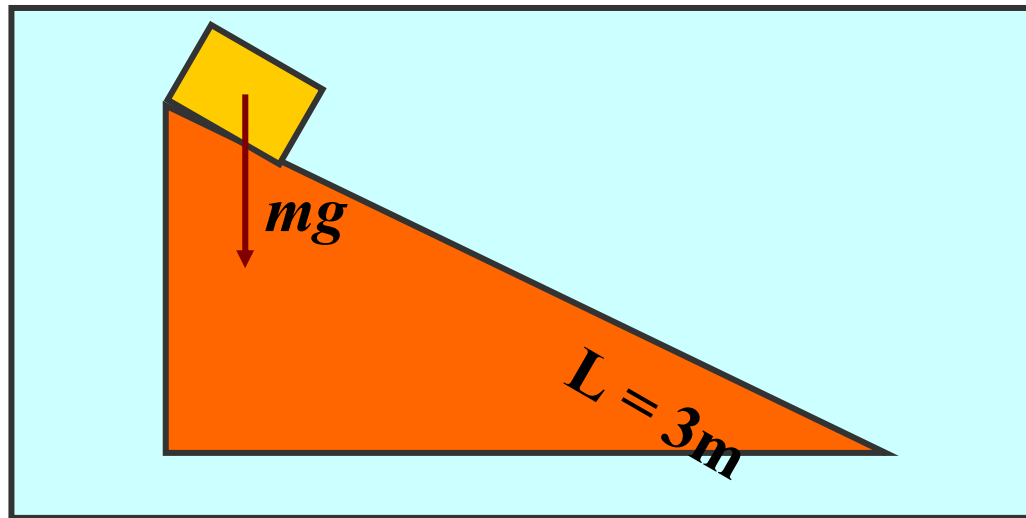
Se rotola e ha  $r=0,2$  m

$$F = \frac{hmg}{r} = \frac{5 \cdot 10^{-5} 10^3 \cdot 9,8}{0,2} = 2,5\text{N}$$

# Il piano inclinato

Una cassa di materiale proveniente da uno scavo di massa  $m = 30 \text{ kg}$  scivola lungo un pianale inclinato di  $30^\circ$  rispetto al suolo. Quanto tempo impiega la cassa per raggiungere la base del pianale se questo è lungo  $3 \text{ m}$ ? Con quale velocità la cassa raggiunge il suolo, se  $v_0$  iniziale è nulla?

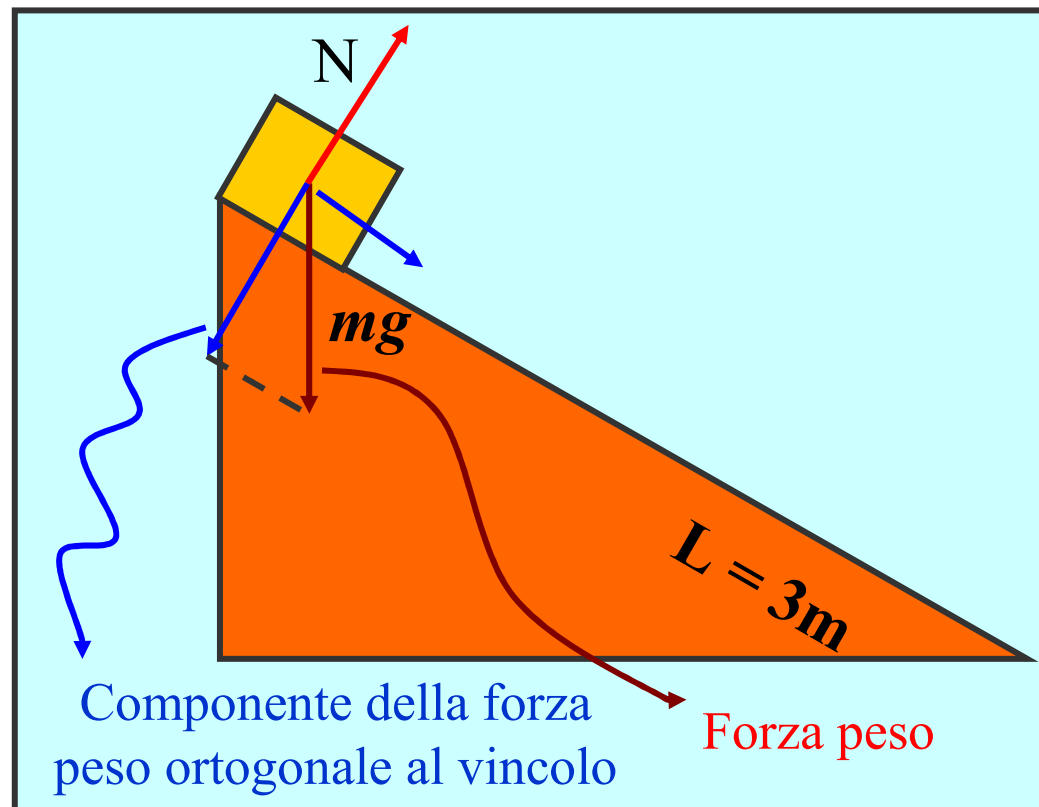
E' importante **disegnare su un grafico** la situazione descritta nel testo e **tracciare tutte le forze con direzione e verso corretti**  
Forze agenti sono: forza peso e reazione vincolare.



# Diagramma delle forze

Il piano inclinato si comporta come un vincolo per il moto della cassa. Esso esercita quindi una **forza di reazione ortogonale al piano stesso**.

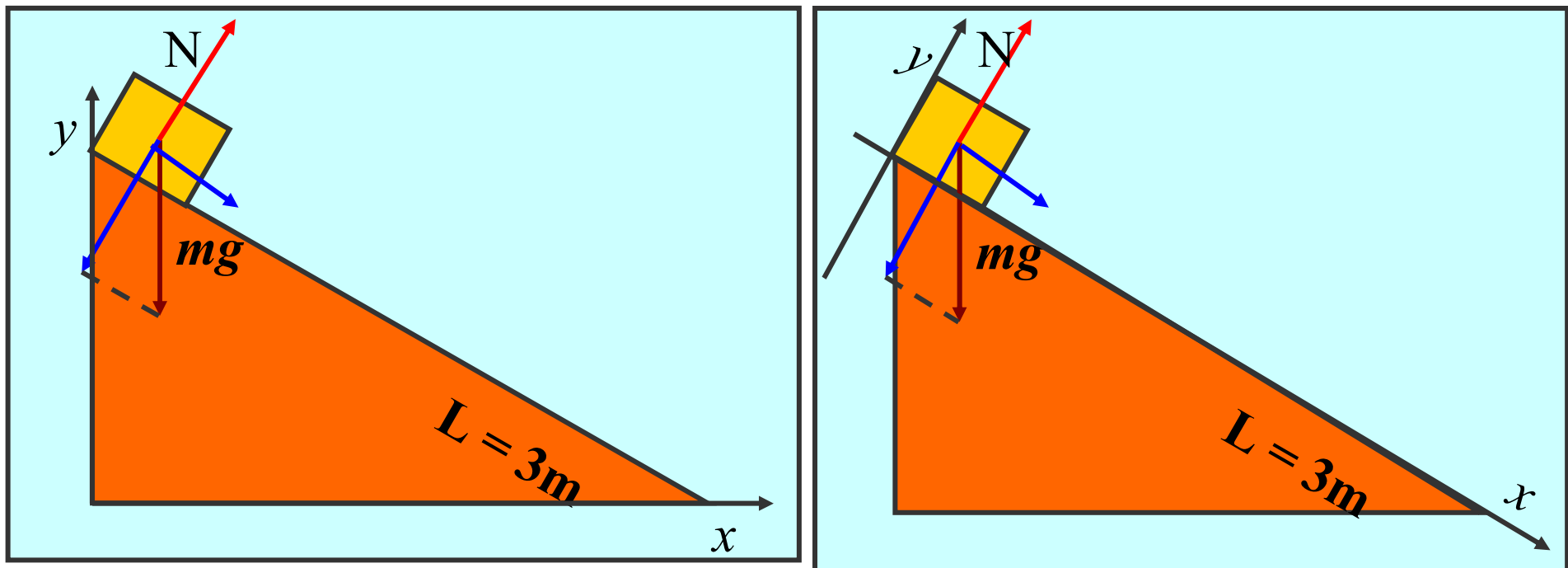
Il modulo della reazione vincolare  $N$  è tale da compensare la componente della forza peso **ortogonale al piano**.



# Sistema di riferimento

Dobbiamo ora scegliere un sistema di riferimento nel quale descrivere il moto della cassa. Il moto si svolge tutto in un piano. Quindi si usano assi  $x$  e  $y$ .

Ci sono due scelte per gli assi. La prima è quella di prendere l'asse delle  $x$  parallelo al terreno. La seconda  $x$  parallelo a piano e  $y$  ortogonale ad esso

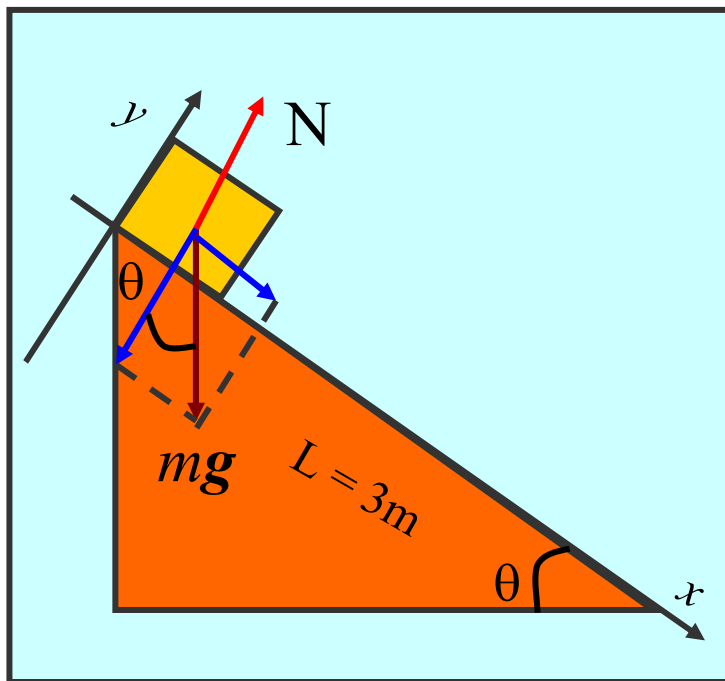


# Equazione del moto

Quale delle due scelte è la migliore? In entrambi i casi una delle due forze andrà scomposta lungo gli assi. Vedo quale è più semplice

il piano **inclinato agisce da vincolo** → l'**accelerazione** in direzione **ortogonale** ad esso sarà **nulla** → sistema di riferimento con **l'asse x parallelo al piano inclinato**  
**l'equazione del moto è semplificata**. Dobbiamo ora scrivere **l'equazione del moto** per la cassa.

E' **un'equazione vettoriale**. Scriviamo le due equazioni lungo x e y



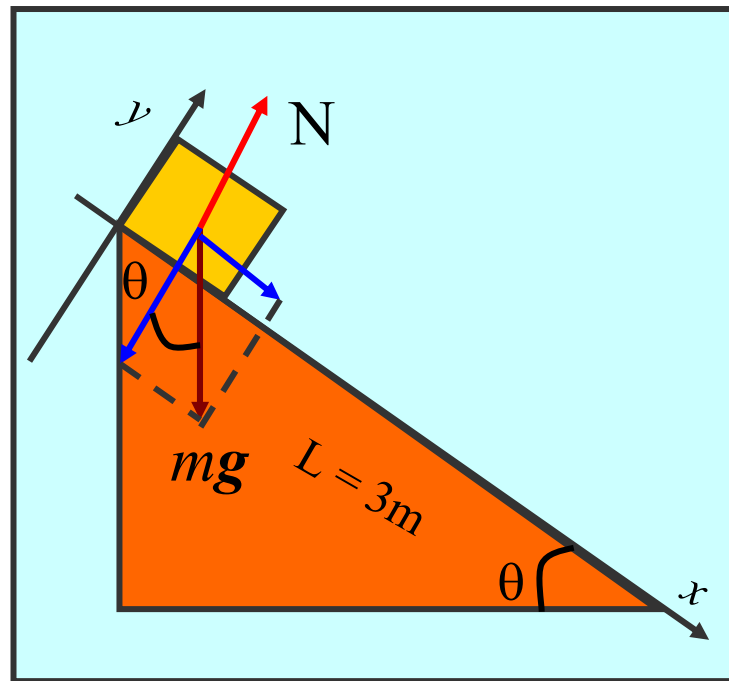
$$\sum_i \mathbf{F}_i = m\mathbf{a} \Rightarrow \begin{cases} mg \sin \theta = ma_x \\ -mg \cos \theta + N = ma_y \end{cases}$$

L'**accelerazione** lungo l'asse **y** deve essere **nulla** per la presenza del vincolo. Pertanto:

$$\sum_i \mathbf{F}_i = m\mathbf{a} \Rightarrow \begin{cases} mg \sin \theta = ma_x \\ -mg \cos \theta + N = 0 \end{cases}$$

# Accelerazione e tempo

ci sono **due incognite**, il modulo **N** della reazione vincolare e l'accelerazione lungo x, **a<sub>x</sub>**) e due equazioni indipendenti tra loro → problema ha soluzione.



La prima equazione ci dà  
**l'accelerazione:**

$$mg \sin \theta = ma_x$$

$$a_x = g \sin \theta$$

La seconda, il modulo della  
**reazione vincolare:**

$$N = mg \cos \theta$$

$$x = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 \quad \Rightarrow x = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2} \cdot g \cdot \sin \theta \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot 9,8 \cdot \frac{1}{2} \cdot t^2 \quad \Rightarrow x = 2,45 \cdot t^2 \Rightarrow 3 = 2,45t^2$$

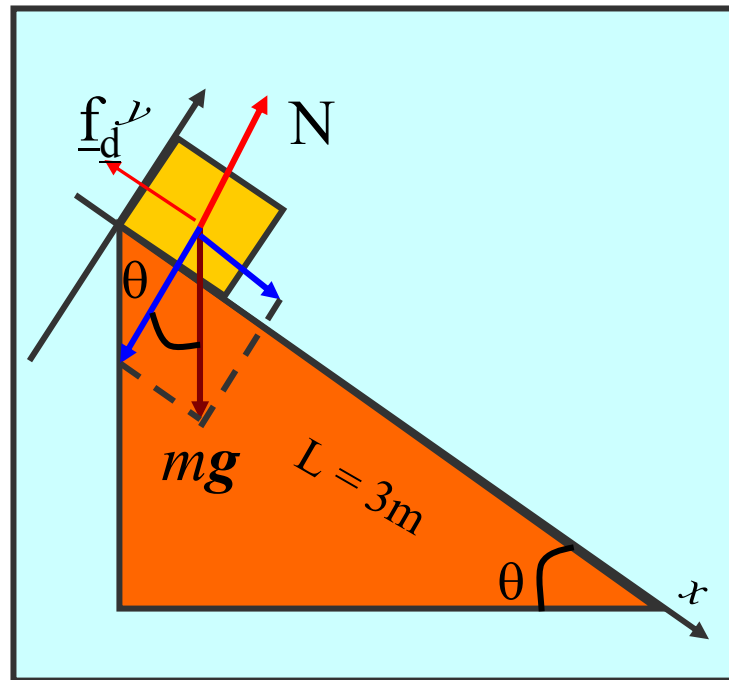
$$t^2 = \frac{3}{2,45} \Rightarrow t = \sqrt{1,22} \Rightarrow t = 1,1s$$

# Piano inclinato con attrito

Stesso problema di prima a cui si aggiunge la forza di attrito dinamico  $f_d$  che ha direzione opposta al moto lungo il pianale

Scriviamo le due equazioni lungo x e y. Lungo y è uguale a prima

L'**accelerazione** lungo l'asse **y** deve essere **nulla** come prima per la presenza del vincolo. Pertanto:



$$\sum_i F_i = ma \Rightarrow \begin{cases} mg \sin \theta - f_d = ma_x \\ -mg \cos \theta + N = 0 \end{cases}$$

$$mg \sin \theta - \mu_d mg \cos \theta = ma_x$$

$$a_x = g(\sin \theta - \mu_d \cos \theta)$$

L'**accelerazione** è costante, ma minore che nel caso senza attrito. Può diventare nulla per opportuni valori di  $\theta$  e di  $\mu_d$