

Forze

1.1 ● Grandezze scalari

Quando le grandezze possono essere rappresentate solo da un numero, esse sono denominate grandezze scalari. Per descrivere una grandezza scalare, quindi, è necessario un numero seguito da un'unità di misura. Ad esempio 50 anni, 27°C, 1700 abitanti. Le grandezze che sono definite da un modulo o intensità, da una direzione e da un verso sono chiamate grandezze vettoriali.

● Le forze

Le forze sono delle grandezze vettoriali, ossia grandezze che si possono rappresentare con un vettore.

Un vettore, e quindi una forza, è costituito da:

- direzione, che corrisponde alla retta d'azione della forza stessa;
- verso, che è il senso di applicazione del vettore;
- punto di applicazione, che è il punto in cui è applicato il vettore;
- intensità, che rappresenta l'entità della forza rapportata all'unità prefissata in scala.

Quindi se si usa la scala di $1\text{ cm} = 100\text{ N}$, il segmento che rappresenta la forza F di intensità 450 N deve avere una lunghezza di 4,5 cm.

Spesso accade che su di un corpo agiscono contemporaneamente più forze, ossia agisce un sistema di forze che possono avere direzione qualsiasi nello spazio. Per semplicità in seguito si farà riferimento solo a forze che agiscono sullo stesso piano, ossia ad un sistema di forze complanari.

In figura 1.1 è stato rappresentato un sistema di forze complanari.

● Scomposizione di una forza

Volendo scomporre una forza F secondo due rette orientate di direzione x , y tra loro perpendicolari, basta proiettare la forza stessa sulle direzioni assegnate. In figura 1.2 è rappresentata una forza F scomposta nelle due componenti F_x ed F_y tra loro perpendicolari. Se si indica con α l'angolo delimitato dalla direzione della forza F e l'asse delle ascisse x , il valore delle componenti si ottiene con le relazioni di trigonometria ($\rightarrow$ U.D. 0):

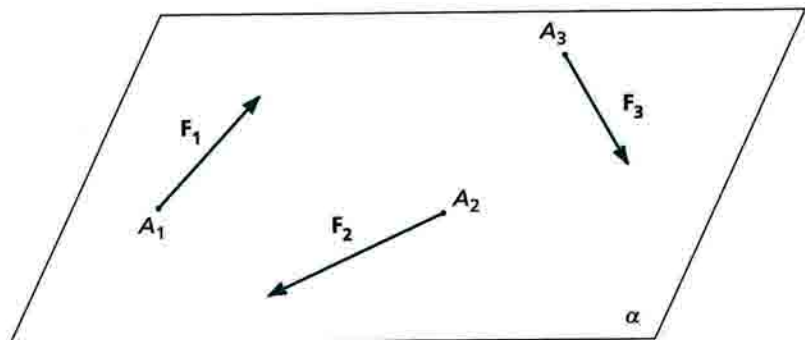


Fig. 1.1 – Sistema di forze complanari.

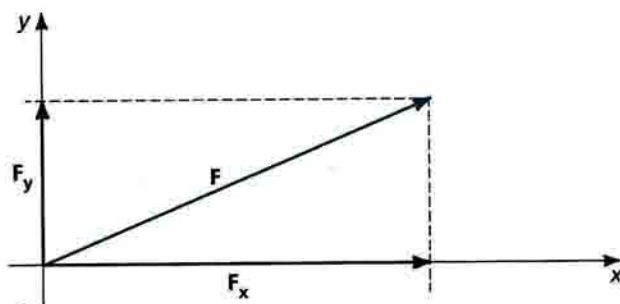


Fig. 1.2 – Scomposizione di una forza lungo due direzioni perpendicolari tra loro.

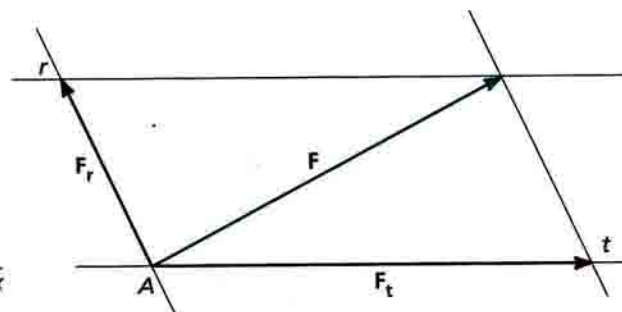


Fig. 1.3 – Scomposizione di una forza lungo due direzioni.

$$F_x = F \cos \alpha$$

$$F_y = F \sin \alpha$$

Se invece si vuole scomporre una forza F secondo due rette di direzioni assegnate r e t , per ottenere le componenti basta tracciare dall'estremo del vettore F le parallele alle rette r e t (fig. 1.3). Il parallelogramma individuato evidenzierà le componenti cercate F_r ed F_t .

● Risultante di due forze

- Si definisce risultante di un sistema di forze quella forza che sostituita al sistema produce gli stessi effetti.

Si considerino due forze F_1 ed F_2 aventi la stessa direzione e lo stesso verso (concordi); la loro risultante è un vettore che ha stessa direzione delle forze, stesso verso e intensità pari alla somma delle intensità di F_1 ed F_2 (fig. 1.4):

$$R = F_1 + F_2$$

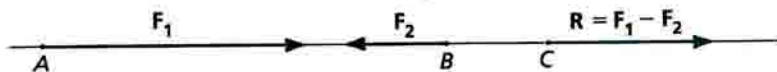
Fig. 1.4 – Risultante di due forze concordi.



Se le forze hanno stessa direzione ma verso opposto (discordi), la risultante è un vettore che ha la stessa direzione delle forze F_1 ed F_2 , il verso del vettore di intensità maggiore e intensità pari alla differenza delle intensità di F_1 ed F_2 (fig. 1.5):

$$R = F_1 - F_2$$

Fig. 1.5 – Risultante di due forze discordi.



La risultante di due forze concorrenti comunque orientate si ottiene graficamente tracciando dall'estremo del vettore F_2 la parallela ad F_1 e dall'estremo del vettore F_1 la parallela ad F_2 . Si individua in questo modo un parallelogramma la cui diagonale (uscendo dal punto comune A di applicazione delle due forze) è la risultante cercata $R = F_1 + F_2$ (fig. 1.6).

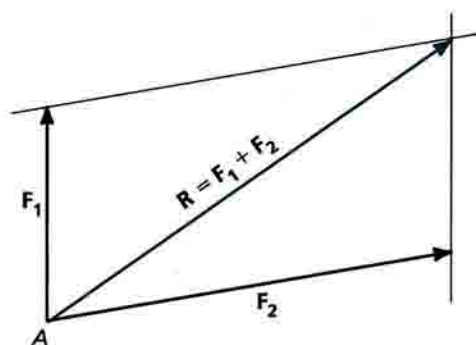


Fig. 1.6 – Risultante di due forze.

ESERCIZIO 1

Su di un corpo agiscono due forze rispettivamente di 40 N e di 50 N, applicate in uno stesso punto, e che formano tra loro un angolo di 35 gradi. Calcolare la risultante.

Soluzione

Applicando il teorema di Carnot ($\rightarrow$ U.D. 0), si ottiene:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cos \alpha}$$

e passando ai valori numerici:

$$R = \sqrt{40^2 + 50^2 + 2 \cdot 40 \cdot 50 \cos 35^\circ}$$

$$R = \sqrt{1600 + 2500 + 4000 \cdot 0,819} = 86 \text{ N}$$

● Risultante di due forze parallele

Quando le forze F_1 ed F_2 sono parallele e concordi e sono poste ad una distanza nota $\overline{AB}$ tra loro, la risultante è un vettore parallelo alle forze date, ha intensità pari alla somma delle intensità delle forze F_1 ed F_2 ed è applicata in un punto O interno al segmento $\overline{AB}$, il quale si trova più vicino al vettore di maggiore intensità (fig. 1.7).

Il punto O può essere individuato analiticamente scrivendo una proporzione tra le forze F_1 ed F_2 e le rispettive distanze del loro punto di applicazione dal punto O :

$$F_1 : F_2 = \overline{OB} : \overline{AO}$$

In questa relazione ci sono due incognite e per risolverle si applica la regola del comporre:

$$(F_1 + F_2) : F_1 = (\overline{OB} + \overline{AO}) : \overline{OB}$$

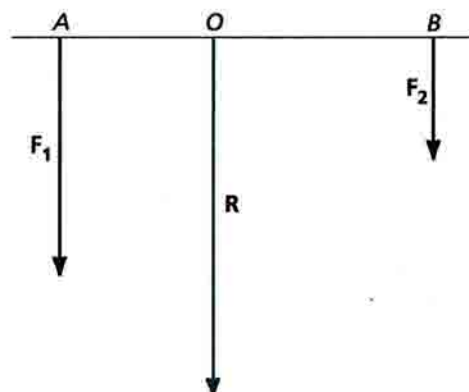


Fig. 1.7 – Risultante di due forze parallele concordi.

e ricordando che:

$$F_1 + F_2 = R$$

e:

$$\overline{OB} + \overline{AO} = \overline{AB}$$

si ottiene:

$$R : F_1 = \overline{AB} : \overline{OB}$$

da cui, noti tutti gli altri valori, si ricava:

$$\overline{OB} = \frac{F_1 \cdot \overline{AB}}{R}$$

Lo stesso ragionamento può essere fatto nel caso di due forze F_1 ed F_2 parallele e discordi (fig. 1.8).

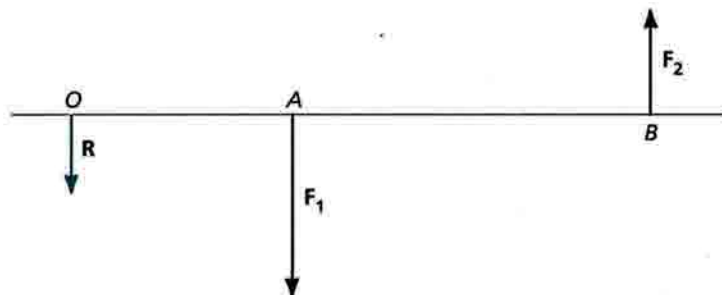


Fig. 1.8 – Risultante di due forze parallele discordi.

In questo caso la risultante R è parallela alle forze F_1 ed F_2 , ha intensità pari alla differenza dell'intensità delle forze ed è applicata in un punto O esterno alla congiungente $\overline{AB}$, il quale è disposto dalla parte della forza di maggiore intensità.

Anche in questo caso il punto O può essere individuato scrivendo una proporzione tra le forze F_1 ed F_2 e le rispettive distanze del loro punto di applicazione dal punto O :

$$F_1 : F_2 = \overline{OB} : \overline{OA}$$

e applicando la regola dello scomporre si ha:

$$(F_1 - F_2) : F_1 = (\overline{OB} - \overline{OA}) : \overline{OB}$$

e ricordando che:

$$F_1 - F_2 = R$$

e:

$$\overline{OB} - \overline{OA} = \overline{AB}$$

si ottiene:

$$R : F_1 = \overline{AB} : \overline{OB}$$

da cui, noti tutti gli altri valori, si ricava:

$$\overline{OB} = \frac{F_1 \cdot \overline{AB}}{R}$$

● Poligono funicolare

Per determinare la risultante di un sistema di forze complanari si esegue una costruzione grafica detta del poligono funicolare che consente di ottenere agevolmente l'intensità della risultante e la sua direzione (fig. 1.9).

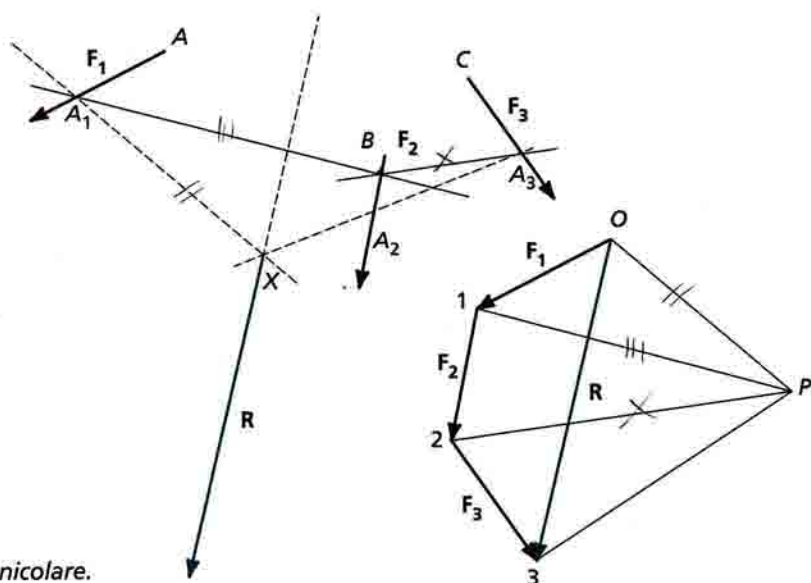


Fig. 1.9 – Poligono funicolare.

Si abbiano per semplicità solo tre forze complanari; si costruisce, a partire da un punto O qualsiasi, una poligonale riportando le forze F_1 , F_2 ed F_3 consecutivamente, con stessa intensità e con direzioni parallele a quelle delle forze stesse; si individuano così i punti 1-2-3; congiungendo il punto O con il punto 3 si ottiene la risultante del sistema di forze.

Per trovare la direzione della risultante si sceglie un punto qualsiasi P e si congiunge tale punto con i punti O , 1, 2 e 3. Si traccia, poi, la parallela ad OP fino ad intersecare la direzione della forza F_1 in un punto A_1 ; da questo punto si traccia la parallela ad $1P$ fino ad intersecare la direzione della forza F_2 nel punto A_2 ; da tale punto si traccia la parallela a $2P$ fino ad intersecare la direzione della forza F_3 nel punto A_3 ; da A_3 si traccia la parallela a $3P$. Le rette passanti per A_1 e A_3 e parallele rispettivamente a OP e a $3P$ si incontreranno in un punto X che individua il punto per il quale passa la risultante R . La direzione della risultante è la retta passante per X parallela alla risultante precedentemente determinata.

● Momento di una forza

► Si definisce momento di una forza F rispetto a un punto P , detto polo, il vettore M perpendicolare al piano su cui giace la forza F , di intensità $M = F \cdot b$

in cui b è il braccio, ossia la distanza tra il polo e la direzione della forza F , con il verso rivolto in alto se la rotazione della forza rispetto al polo avviene in senso orario, in basso in caso contrario (fig. 1.10). Naturalmente il momento è nullo se la retta di applicazione della forza F passa per il polo, perché in questa ipotesi il braccio è nullo.

L'unità di misura del momento è il newton per metro ($N \cdot m$).

Un sistema di due forze parallele e discordi, di uguale intensità e distanti tra loro b prende il nome di coppia di forze (fig. 1.11).

Anche in questo caso le forze danno luogo a un vettore momento che vale:

$$M = F \cdot b$$

il quale è perpendicolare al piano su cui agiscono le forze; tale vettore è rivolto verso l'alto se le forze generano una rotazione oraria, verso il basso se la rotazione è antioraria.

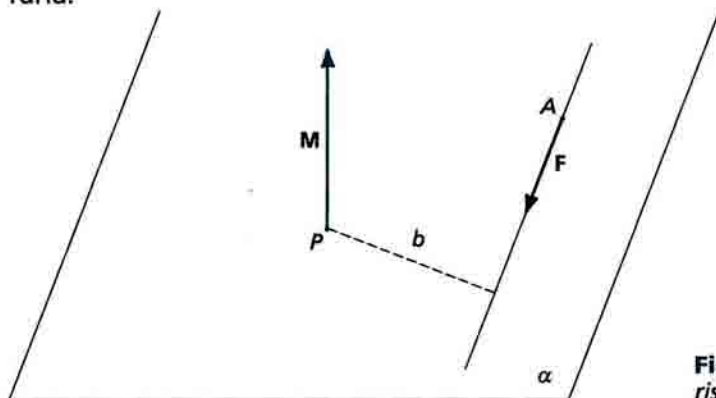


Fig. 1.10 – Momento di una forza rispetto a un punto.

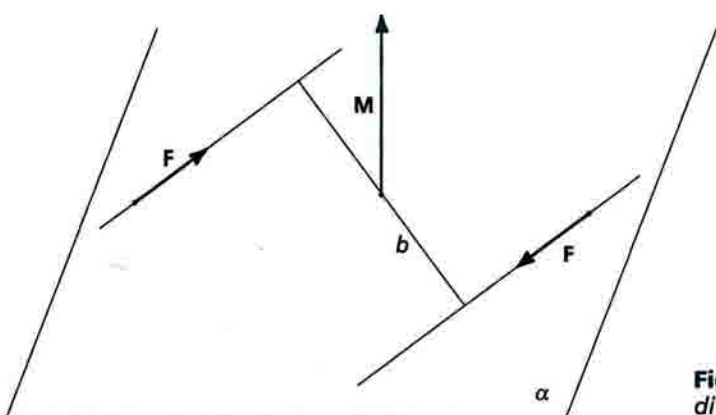


Fig. 1.11 – Momento di una coppia di forze.

ESERCIZIO 4

Calcolare il momento di una forza di 600 N distante 0,25 m dal polo P .

Soluzione

Il momento è dato da:

$$M = F \cdot b$$

e passando ai valori numerici si ha:

$$M = 600 \cdot 0,25 = 150 \text{ N} \cdot \text{m}$$

● Baricentro dei corpi. Peso

Ciascun corpo è soggetto, per effetto del campo gravitazionale, ad una forza diretta verso il centro della Terra chiamata forza-peso del corpo. Si può pensare che ogni corpo sia costituito da masse elementari in ognuna delle quali è applicata una forza-peso elementare. Il sistema di tutte queste forze parallele avrà una risultante parallela alle forze stesse, di intensità pari alla somma delle forze elementari; essa rappresenta il peso del corpo. Tale vettore risultante è applicato in un punto che si definisce baricentro G del corpo.

► Si definisce massa m di un corpo la quantità di materia che costituisce il corpo stesso.

Essa può essere espressa come prodotto della massa volumica ρ del materiale che costituisce il corpo (espressa in kg/m^3) per il suo volume V :

$$m = \rho \cdot V$$

[kg]

Il peso di un corpo può essere espresso come prodotto della massa m per l'accelerazione di gravità g (essendo $g \approx 9,81 \text{ m/s}^2$):

$$P = m \cdot g \quad [\text{N}]$$

e sostituendo il valore della massa m precedentemente ricavato si ottiene:

$$P = \rho \cdot V \cdot g \quad [\text{N}]$$

ESERCIZIO 5

Calcolare il peso di un pezzo di legno ($\rho = 600 \text{ kg/m}^3$) di forma parallelepipedica avente dimensioni $2 \cdot 0,3 \cdot 3$ metri.

Soluzione

Per calcolare il peso si deve risalire al volume del corpo. Il volume di un parallelepipedo è dato dal prodotto delle dimensioni dei lati, per cui:

$$V = 2 \cdot 0,3 \cdot 3 = 1,8 \text{ m}^3$$

Poiché il peso vale:

$$P = \rho \cdot V \cdot g$$

si ottiene:

$$P = 600 \cdot 1,8 \cdot 9,81 = 10594,8 \text{ N}$$

ESERCIZIO 6

Trovare l'altezza di un cilindro retto di acciaio avente massa 25 kg e diametro di base 0,2 m. Si consideri per l'acciaio $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$.

Soluzione

Sapendo che la massa $m = \rho \cdot V$ si ricava il volume del cilindro:

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{25}{7,8} = 3,2 \text{ dm}^3$$

Il volume del cilindro si calcola:

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

da cui si ricava:

$$h = \frac{V}{\pi \cdot r^2}$$

e passando ai valori numerici, poiché $r = 0,1 \text{ m} = 1 \text{ dm}$, si ottiene:

$$h = \frac{3,2}{3,14 \cdot 1^2} = 1 \text{ m}$$

ESERCIZIO 7

Calcolare il peso di una barra di rame lunga 2 metri e di diametro 20 mm, sapendo che ρ del rame è 9 kg/dm^3 .

Soluzione

Il peso si calcola con:

$$P = \rho \cdot V \cdot g$$

Poiché il raggio della barra è 0,1 dm e la lunghezza 20 dm:

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot \ell = 3,14 \cdot 0,1^2 \cdot 20 = 0,628 \text{ dm}^3$$

e sostituendo si ricava:

$$P = 9 \cdot 0,628 \cdot 9,81 = 55,4 \text{ N}$$

ESERCIZIO 8

Calcolare la massa di un cilindro di alluminio di diametro 26 cm e altezza 1,2 m, sapendo che $\rho = 2,7 \text{ kg/dm}^3$.

Soluzione

Ricordando che $m = \rho \cdot V$ e che $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$, si ottiene:

$$V = 3,14 \cdot 1,3^2 \cdot 12 = 63,7 \text{ dm}^3$$

e sostituendo si ottiene:

$$m = 2,7 \cdot 63,7 = 172 \text{ kg}$$

● Geometria delle masse

- Si definisce momento statico di massa rispetto a un asse il prodotto della massa per la sua distanza dall'asse. Esso si misura in kg/m.

Il momento statico S_x di diverse masse m_1, m_2, m_3 con distanze rispettivamente di y_1, y_2, y_3 rispetto a uno stesso asse x è la somma algebrica dei singoli momenti statici. Riferendosi alla figura 1.12 si può scrivere:

$$S_x = m_1 \cdot y_1 + m_2 \cdot y_2 + m_3 \cdot y_3$$

Se si considerano 3 masse allineate lungo un asse x (fig. 1.13) e si considera il punto C come il centro delle masse, individuato un asse y perpendicolare ad x e passante per C , si può affermare che il centro si trova in posizione tale per cui il momento statico delle masse disposte a sinistra di C eguaglia quello delle masse disposte a destra. Facendo riferimento alla figura 1.13 si può scrivere:

$$m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2 = m_3 \cdot x_3$$

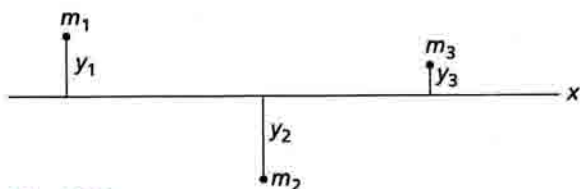


Fig. 1.12

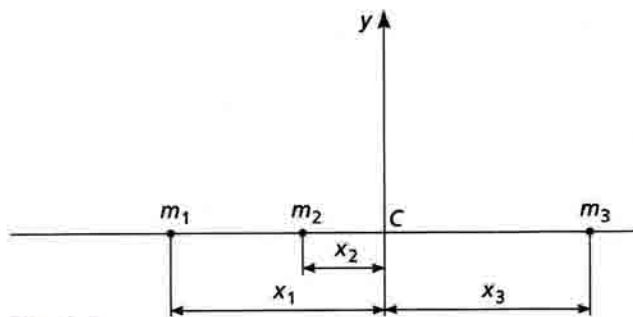


Fig. 1.13

La stessa cosa si può affermare se le masse non sono allineate. Quindi il centro di un sistema di masse è il punto per il quale passano tutti gli assi rispetto ai quali il momento statico totale delle masse è nullo.

- Il teorema di Varignon afferma che il momento statico totale di un sistema di masse rispetto a un asse non cambia se le masse vengono raggruppate nel loro centro.

Ogni corpo può essere immaginato come un insieme di infinite masse elementari, ciascuna delle quali è sottoposta all'accelerazione di gravità e quindi a un peso la cui direzione è verticale, cioè rivolta verso il centro della Terra.

Il centro del sistema formato dalle singole forze peso elementari di un corpo è chiamato baricentro G . Se il corpo è rigido tutto il suo peso si può considerare applicato nel baricentro.

Le coordinate del baricentro di un sistema di masse rispetto a un sistema cartesiano si possono ricavare con le formule:

$$X_G = \frac{\sum_i (m_i \cdot x_i)}{m} \quad Y_G = \frac{\sum_i (m_i \cdot y_i)}{m}$$

in cui $\sum_i (m_i \cdot x_i)$ e $\sum_i (m_i \cdot y_i)$ rappresentano la sommatoria dei momenti statici rispetto agli assi x ed y , e m è la massa totale.

ESERCIZIO 9

Trovare il baricentro o centro di massa di due masse rispettivamente di 5 kg e 3 kg, disposte a una distanza di 1 500 mm tra loro.

Soluzione

Indicando rispettivamente con x_1 la distanza della massa di 5 kg, e con x_2 la distanza della massa di 3 kg dal baricentro, si può scrivere:

$$m_1 \cdot x_1 = m_2 \cdot x_2 \text{ ossia } \frac{m_1}{m_2} = \frac{x_2}{x_1}$$

e sostituendo i valori numerici: $\frac{5}{3} = \frac{x_2}{x_1}$ ma anche $5 : 3 = x_2 : x_1$ e applicando la regola del comporre si ha:

$$(5 + 3) : 5 = (x_2 + x_1) : x_2 \text{ ma anche } 8 : 5 = 1\,500 : x_2, \text{ da cui } x_2 = 937,5 \text{ mm.}$$

Quindi la massa di 3 kg dista 937,5 mm dal baricentro e la massa di 5 kg dista 562,5 mm dal baricentro.

Ci proponiamo ora di determinare la posizione del baricentro di alcune figure piane. Una considerazione aiuta a risolvere il problema e cioè: se la superficie ha un asse di simmetria, il baricentro si trova su di esso. Se la superficie ha due assi di simmetria, il baricentro si trova nel punto in cui gli assi di simmetria si intersecano.

In virtù di quanto detto risulta di facile soluzione l'individuazione del baricentro di un quadrato, di un rettangolo o di un parallelogramma: il baricentro è il punto d'incontro delle diagonali. Nei triangoli, come si è già studiato in geometria, il baricentro è il punto d'incontro delle mediane.

Nel caso di un qualsiasi quadrilatero, si può scomporre lo stesso in due triangoli; si ricava poi il baricentro di ciascuno di essi e, immaginando che in ognuno sia concentrata l'intera area, e quindi l'intera massa, in virtù di quanto afferma il teorema di Varignon, per determinare il baricentro della figura basta determinare il baricentro delle due masse.

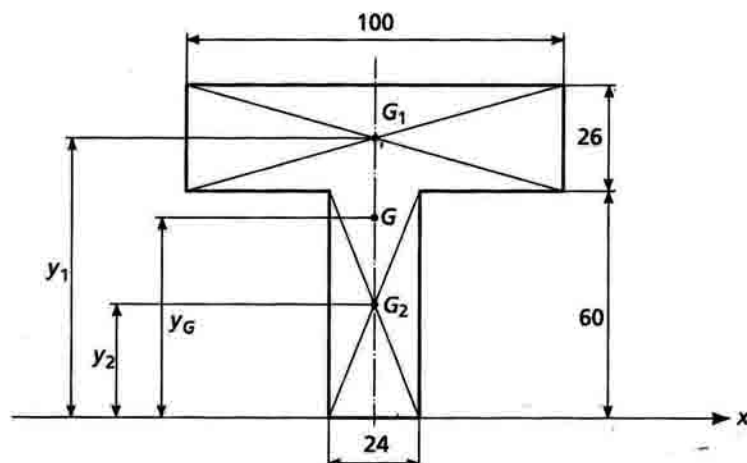
Non necessariamente il baricentro di una figura piana si trova all'interno della superficie, ma si può trovare anche esternamente ad essa.

Un caso particolare è la ricerca del baricentro di un triangolo rettangolo che poggia su

uno dei cateti; il baricentro G , come già detto, è il punto d'incontro delle mediane, ma in questo caso esso ha la caratteristica di trovarsi ad $\frac{1}{3}$ dell'altezza rispetto alla base, e a $\frac{2}{3}$ dell'altezza rispetto al vertice del triangolo.

ESERCIZIO 10

Determinare la posizione del baricentro della superficie in figura:



Soluzione

La figura ha come asse di simmetria l'asse Y_0 e il baricentro ricercato si trova sull'asse Y_0 .

Le coordinate del baricentro sono: $X_G = 0$ e Y_G .

Si scompone la superficie in due rettangoli, i cui baricentri sono G_1 e G_2 , ottenuti dall'intersezione delle diagonali dei rettangoli.

Le ordinate di G_1 e G_2 sono: $Y_1 = 60 + \frac{26}{2} = 73 \text{ mm}$ e $Y_2 = \frac{60}{2} = 30 \text{ mm}$

Indicando con A_1 ed A_2 le aree parziali dei rettangoli, l'ordinata Y_G è data da:

$$Y_G = \frac{A_1 \cdot Y_1 + A_2 \cdot Y_2}{A}$$

E con le quote della figura si ha:

$$A_1 = 26 \cdot 10 = 2600 \text{ mm}^2$$

$$A_2 = 24 \cdot 60 = 1440 \text{ mm}^2$$

La superficie totale vale: $A = 4040 \text{ mm}^2$

e sostituendo si ha:

$$Y_G = \frac{2600 \cdot 73 + 1440 \cdot 30}{4040} = 57,67 \text{ mm}$$

Teoremi di Guldino

Si supponga di far ruotare una superficie (ad esempio un triangolo rettangolo) intorno ad un asse Y posto sul cateto maggiore, come indicato in figura 1.14.

Si ottiene un solido, detto solido di rotazione, che nel nostro esempio particolare è un cono. L'ipotenusa del triangolo genera una superficie di rotazione. Si possono enunciare i seguenti teoremi di Guldino:

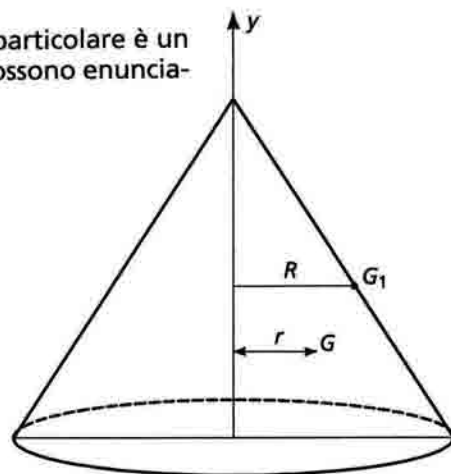


Fig. 1.14

Primo teorema di Guldino

L'area di una superficie di rotazione è uguale al prodotto tra la lunghezza della linea generatrice (nel nostro caso l'ipotenusa) e la lunghezza della circonferenza descritta durante la rotazione dal baricentro G_1 della suddetta linea. Indicando con R il raggio di rotazione del baricentro G_1 si ha: $S_{\text{rot}} = l \cdot 2 \cdot \pi \cdot R$.

Secondo teorema di Guldino

Il volume di un solido di rotazione è uguale al prodotto tra l'area della superficie generatrice e la lunghezza della circonferenza descritta durante la rotazione dal baricentro G della suddetta superficie. Indicando con r il raggio di rotazione del baricentro G del triangolo si ha: $V_{\text{rot}} = A \cdot 2 \cdot \pi \cdot r$, in cui A è l'area della superficie generatrice (nel nostro caso il triangolo).

● Momenti quadratici di superfici

Analogamente a quanto già detto per le masse, si può definire il momento statico S di una superficie rispetto a un asse. Esso è dato dalla sommatoria dei prodotti delle aree elementari che costituiscono la superficie per il quadrato delle rispettive distanze dall'asse. In considerazione di quanto afferma il teorema di Varignon, il momento d'inerzia si può calcolare moltiplicando l'area per la distanza del suo baricentro dall'asse. Quindi, immaginando di concentrare la superficie nel suo baricentro, si ottiene:

$$S = A \cdot Y_G$$

- Si definisce momento d'inerzia assiale I di una superficie rispetto a un asse X la sommatoria dei prodotti tra le aree elementari a_i e il quadrato delle rispettive distanze y_i dall'asse X .

$$I_x = \sum_i (a_i \cdot y_i^2)$$

Il momento d'inerzia assiale si misura in m^4 . I valori dei momenti quadratici o d'inerzia di superfici sono riportati nei manuali tecnici.

Dalla precedente relazione si ricava il raggio d'inerzia ρ della superficie A rispetto all'asse X :

$$\rho = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$$

Se si conosce il momento quadratico rispetto a un asse r , si può ricavare il momento quadratico rispetto a un qualunque altro asse ad esso parallelo con il teorema di trasposizione. Considerando la figura 1.15, volendo trovare il momento quadratico rispetto a un asse t , essendo noto il momento quadratico rispetto all'asse r , si può scrivere:

$$I_t = I_r + A \cdot d^2$$

In altre parole, il momento quadratico rispetto all'asse t è dato dal momento quadratico rispetto all'asse r a cui si somma il prodotto tra l'area A della superficie e il quadrato della distanza tra i due assi.

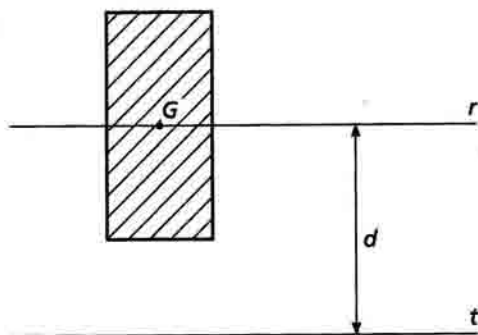


Fig. 1.15

Il termine $A \cdot d^2$ prende il nome di momento di trasporto e rappresenta il momento che avrebbe la superficie A rispetto all'asse t se fosse concentrata nel proprio baricentro. Anche per i raggi d'inerzia vale la relazione:

$$\rho^2 = \rho_r^2 + d^2$$

● Momento polare

- Il momento polare I_p è la sommatoria dei prodotti tra le aree elementari a_i e il quadrato delle loro rispettive distanze d_i da un punto P detto polo (fig. 1.16).

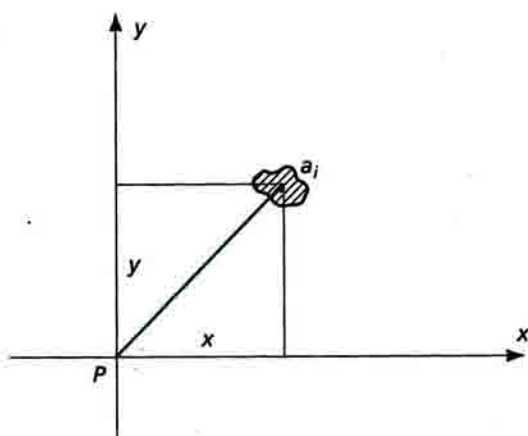


Fig. 1.16

$$I_p = \sum_i (a_i \cdot d_i^2)$$

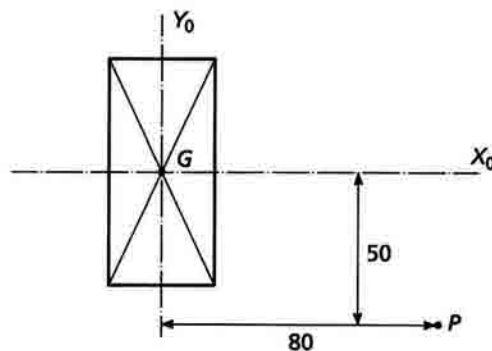
Esso si misura in m^4 .

Per ogni area elementare, per il teorema di Pitagora, si ha: $d^2 = x^2 + y^2$ e sostituendo nella relazione precedente si ha:

$\sum_i (a_i \cdot d_i^2) = \sum_i (a_i \cdot x_i^2) + \sum_i (a_i \cdot y_i^2)$ e quindi $I_p = I_x + I_y$, relazione che consente di ricavare il momento d'inerzia polare se sono noti i due momenti assiali.

Calcolare il momento d'inerzia polare rispetto al punto P di un rettangolo con le seguenti dimensioni: base 40 mm; altezza 60 mm.

Il punto P dista 50 mm dall'asse baricentrico X_0 e 80 mm dall'asse baricentrico Y_0 .



Soluzione

La superficie del rettangolo vale:

$$A = 60 \cdot 40 = 2400 \text{ mm}^2$$

Si calcolano i momenti d'inerzia rispetto agli assi baricentrici:

$$I_{X_0} = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{40 \cdot 60^3}{12} = 720\,000 \text{ mm}^4$$

$$I_{Y_0} = \frac{h \cdot b^3}{12} = \frac{60 \cdot 40^3}{12} = 320\,000 \text{ mm}^4$$

Applicando la formula di trasposizione si ha:

$$I_X = I_{X_0} + A \cdot d_1^2 = 720\,000 + 6\,000\,000 = 6\,720\,000 \text{ mm}^4$$

$$I_Y = I_{Y_0} + A \cdot d_2^2 = 320\,000 + 15\,360\,000 = 15\,680\,000 \text{ mm}^4$$

● Momento d'inerzia di massa

Con procedimento analogo a quello adottato per il momento d'inerzia di superficie, si può definire il momento d'inerzia di massa, facendo riferimento invece che alle aree elementari a_i alle masse elementari m_i che costituiscono un corpo.

Il momento d'inerzia di massa J è la sommatoria dei prodotti tra ciascuna massa elementare m_i e il quadrato della sua distanza y_i rispetto all'asse x :

$$J_x = \sum_i (m_i \cdot y_i^2)$$

Esso si misura in $\text{kg} \cdot \text{m}^2$.

Il momento d'inerzia di massa dipende dalla forma del corpo e dall'asse rispetto a cui viene calcolato. Infatti, a parità di massa, il momento d'inerzia è maggiore se questa è meno concentrata intorno all'asse. Di due corpi rotanti intorno al proprio asse verticale, di cui uno è più snello di un altro, a parità di massa, ha momento d'inerzia minore il corpo più snello; infatti per questo è minore la distanza delle masse elementari che lo costituiscono rispetto all'asse di rotazione.

Il momento d'inerzia di massa ha un grande e fondamentale significato fisico; se si mettessero in rotazione due alberi intorno al proprio asse, avrebbe un momento d'inerzia maggiore quello con raggio maggiore. Ciò significa che più facilmente raggiunge la velocità di regime un albero di un motore che ha minore diametro rispetto ad un altro di diametro maggiore.

Anche per il momento d'inerzia di massa vale la relazione:

$J_t = J_r + m \cdot d^2$, in cui il termine $m \cdot d^2$ rappresenta il momento di trasporto, che equivale al momento rispetto all'asse t dell'intera massa concentrata nel baricentro del corpo. I valori dei momenti d'inerzia di massa si possono trovare in apposite tabelle nei manuali tecnici.

ESERCIZIO 12

Determinare il momento d'inerzia di massa di un cilindro retto di legno ($\rho = 0,6 \text{ kg/dm}^3$) rispetto al suo asse longitudinale, sapendo che esso è alto 4 dm e ha un diametro di 2,6 dm.

Soluzione

Il volume del cilindro vale:

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h = 3,14 \cdot 1,32 \cdot 4 = 21,24 \text{ dm}^3$$

La massa del cilindro vale $m = \rho \cdot V = 0,6 \cdot 21,24 = 12,74 \text{ kg}$

Dal manuale si trova la formula del momento d'inerzia di massa di un cilindro rispetto all'asse longitudinale (vedi tabella):

$$J = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2 = \frac{1}{2} \cdot 12,74 \cdot 0,13^2 = 0,1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

ESERCIZIO 13

Calcolare il momento d'inerzia di massa rispetto all'asse longitudinale di un cilindro cavo di alluminio ($\rho = 2,7 \text{ kg/dm}^3$) alto 40 cm, sapendo che il diametro esterno vale 20 cm e quello interno 16 cm.

Soluzione

Il volume del cilindro è dato dall'area della corona circolare per l'altezza:

$$V = \pi \cdot (r_e^2 - r_i^2) \cdot h = 3,14 \cdot (4 - 1,6^2) \cdot 4 = 18,1 \text{ dm}^3$$

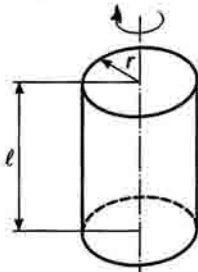
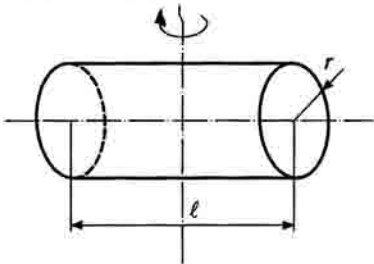
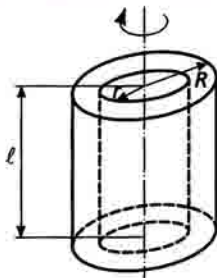
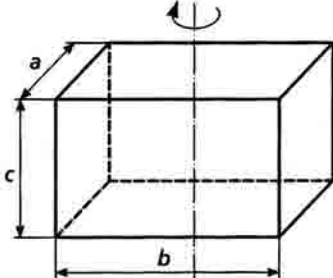
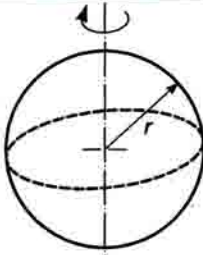
La massa del cilindro vale:

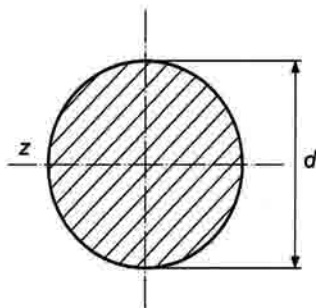
$$m = \rho \cdot V = 2,7 \cdot 18,1 = 48,87 \text{ kg}$$

Dal manuale si trova la formula del momento d'inerzia di massa del cilindro cavo:

$$J = m \cdot \frac{r_e^2 + r_i^2}{2} = 48,87 \cdot \frac{0,1^2 + 0,08^2}{2} = 0,4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

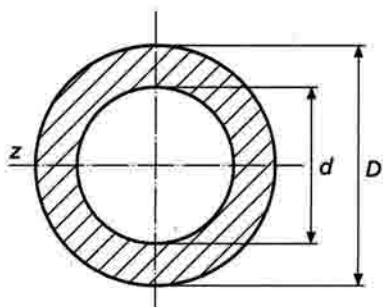
TAV. 1.1 Momenti d'inerzia.

Cilindro	Cilindro	
 $J = \frac{1}{2} m r^2$ $m = \pi r^2 \ell \rho$	 $J = \frac{1}{4} m \left(r^2 + \frac{\ell^2}{8} \right)$ $m = \pi r^2 \ell \rho$	
Cilindro cavo	Parallelepipedo	Sfera
 $J = \frac{1}{2} m (R^2 + r^2)$ $m = \pi (R^2 - r^2) \ell \rho$	 $J = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2)$ $m = a b c \rho$	 $J = \frac{2}{5} m r^2$ $m = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho$



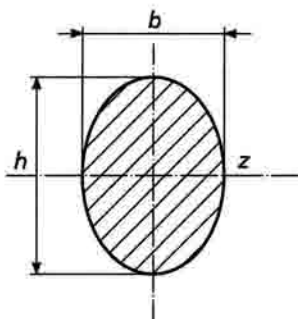
$$I_z = \frac{\pi}{64} d^4$$

$$W_z = \frac{\pi}{32} d^3$$



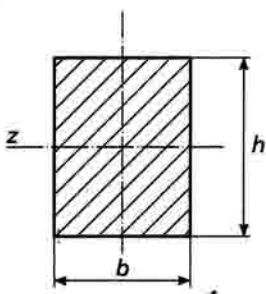
$$\begin{aligned} I_z &= \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4) \\ &= \frac{\pi}{64} D^4 (1 - \chi^4) \\ \text{se } \chi &= \frac{d}{D} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_z &= \frac{\pi}{32} \frac{D^4 - d^4}{D} \\ &= \frac{\pi}{32} D^3 (1 - \chi^4) \\ \text{se } \chi &= \frac{d}{D} \end{aligned}$$



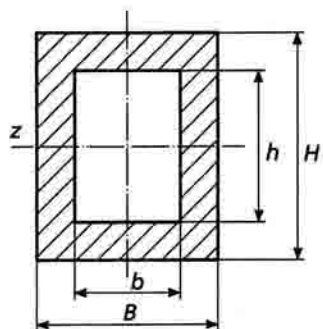
$$I_z = \frac{\pi}{64} b h^3$$

$$W_z = \frac{\pi}{32} b h^2$$



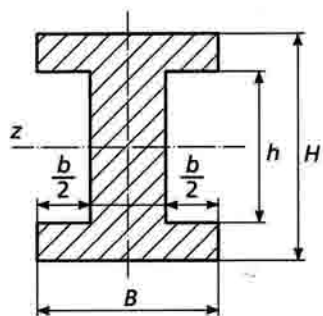
$$\begin{aligned} I_z &= \frac{b h^3}{12} \\ \text{se } b &= h: \\ I_z &= \frac{b^4}{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_z &= \frac{b h^2}{6} \\ \text{se } b &= h: \\ W_z &= \frac{b^3}{6} \end{aligned}$$



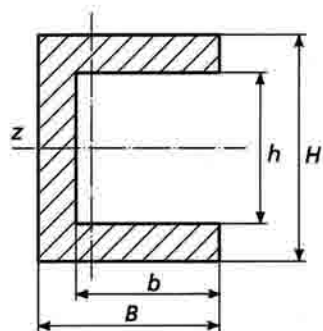
$$I_z = \frac{BH^3 - bh^3}{12}$$

$$W_z = \frac{BH^3 - bh^3}{6H}$$



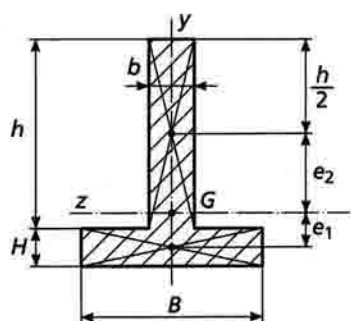
$$I_z = \frac{BH^3 - bh^3}{12}$$

$$W_z = \frac{BH^3 - bh^3}{6H}$$



$$I_z = \frac{BH^3 - bh^3}{12}$$

$$W_z = \frac{BH^3 - bh^3}{6H}$$



$$I_z = \frac{1}{12} BH^3 + BH \cdot e_1^2 + \frac{1}{12} bh^3 + bh \cdot e_2^2$$

$$I = \frac{1}{12} (HB^3 + hb^3)$$

$$W_z = \frac{I_z}{e_2 + \frac{h}{2}}$$

$$W_y = \frac{HB^3 + hb^3}{6B}$$